Research Paper

Comparing First, Second and Third Order Markov Chain to Predict the Occurrence Probability of Frost Days at Baft Synoptic Station

Nadia Shahraki[1*], Safar Marofi[2]

[1] Assistant Professor, Department of Water Science and Engineering, Faculty of Agriculture, University of Jiroft, Iran. shahraki_n@ujiroft.ac.ir
[2] Professor, Department of Water Science and Engineering, Faculty of Agriculture, Bu-Ali Sina University, Iran. marofi@basu.ac.ir

10.22125/iwe.2025.551274.1898.

Received:
August 4, 2025
Accepted:
November 8, 2025
Available online:
December 25, 2025

Keywords:
Baft synoptic station, Minimum daily temperature, Frost period, non-frost period, Markov Chain. Baft synoptic station, Minimum daily temperature, Frost period, non-frost period, Markov Chain.

Abstract

Predicting frost periods is of great importance, as frost damage may reduce the yield potential of many horticultural and agricultural crops in the susceptible areas of the country. Two-state Markov chain models of first, second, and third orders (MC1, MC2, and MC3) were used in the current study for modeling daily frost occurrence and its sequences. The minimum daily temperature data from the Baft synoptic station during the cold months of 1994–2024 were used for the evaluation. To identify the optimum Markov chain model, the Akaike Information Criterion (AIC) was employed. In addition, the estimated conditional probabilities and probability of consecutive non-frost and frost days were given for 2-to-5-day sequences. Findings based on the AIC indicated that the first-order Markov chain model (MC1) was the best to estimate the occurrence of frost. The findings indicated that the consecutive probability average of frost days in 2- to 5-day sequences was, respectively, 30.12%, 22.92%, 17.70%, and 13.78%. Moreover, the chance of consecutive frost episodes of 2-5 days was higher during 3 December to 20 February than it was during the rest of the year.

1. Introduction

The Markov chain process, being a stochastic process, has been widely applied across a number of scientific disciplines, particularly in climatology and agro-meteorology. By applying Markov chains, in frost analysis, the binary state of frost days and non-frost days are simulated. Plenty of research from around the world has established that first-order Markov chains can be employed to simulate frost days, estimate the duration of frost-free days, and calculate persistence probabilities, thus enabling risk assessment and agricultural planning.

[*] **Corresponding Author:** Nadia Shahraki
Address: Department of Water Science and Engineering, University of Jiroft, Iran.
Email: shahraki_n@ujiroft.ac.ir
Tel: 034-41233000

In this study, the occurrence probability and consecutive frost during frost period were investigated based on MC1, MC2 and MC3 models. The aim of this research is to determine the probability of daily frost occurrence and consecutive daily frost with the assistance of the optimal Markov chain model in Baft synoptic station.

2. Methodology

Serials of daily minimum temperatures during the 1994–2024 periods for Baft synoptic station were used in this study. Probabilities of consecutive occurrence of frost and non-frost days from a base of 0 °C threshold for cold months were analyzed using MC1, MC2 and MC3 models. Baft station lies at 29°14′ N latitude and 56°35′ E longitude, with an average sea level height of 2280 m, and has a cold semi-arid climate. Climatic zoning for this station has been established using the extended De Martonne system (Khalili, 1997).

3. Discussion and Conclusion

One of the most significant atmospheric phenomena, with strong influences on energy, transportation and agriculture, with agriculture being most affected among these is frost. So, it is necessary to research frost behavior, predict its occurrence, and study its properties. In this study, MC1, MC2 and MC3 models were evaluated to forecast frost and non-frost duration. For this purpose, separate transition matrices were derived for each day of the year with 0 °C being used as the threshold to find days with below 0 °C minimum temperatures as frost days. The Akaike Information Criterion (AIC) was employed to determine the optimal model order. Based on AIC values, the first-order Markov chain was determined to be the best model for forecasting the daily occurrence of frost and was 70% and 59% better than the second- and third-order models, respectively. Furthermore, short-term characteristics of the frost and non-frost series, i.e., conditional probabilities, and persistence on 2 to 5 day units, were well represented using the first-order two-state Markov chain. The results indicated that the average frost persistence probabilities for 2 to 5 day sequences were 30.12%, 22.92%, 17.70%, and 13.78%, respectively. The chance of 2 to 5day consecutive occurrences of frost was also larger between December 3 and February 20 compared to the other months.

4. The most important references

1) Daniel, S. 1985. Statistical Methods in the Atmospheric Sciences. Dep of soil, Crop and Atmospheric Sciences. ITHACA, Cornell Univ, New Yourk.
2) Mandal, K.G., J. Padhi, A. Kumar, S. Ghosh, D.K. Panda, R.K. Mohanty and M. Raychaudhuri. 2015. Analyses of rainfall using probability distribution and Markov chain models for crop planning in Daspalla region in Odisha, India. Theoretical applied and climatology, 121: 517-528.
3) Moon, S.E., S.B. Ryoo and J.G. Kwon. 1994. A Markov Chain Model for Daily Precipitation Occurrence in South Korea. International Journal of Climatology, 14: 1009-1016.
4) Raj, S. 2025. Frost Forecasting through Machine Learning Algorithms. Earth Science Informatics, 18: 103–117.
5) Talsma, C. J., K. C. Solander, M. K. Mudunuru, B. Crawford and M. R. Powell. 2023. Frost Prediction using Machine Learning and Deep Neural Network Models. Frontiers in Artificial Intelligence, 5: 1-16.
6) Tong, H. 1975. Determination of the order of a Markov chain by Akaike's information criterion. Journal of Applied Probability, 12(3): 488–497.

نشریه علمی پژوهشی مهندسی آبیاری و آب ایران
سال شانزدهم. شماره شصت ویک .پاییز۱۴۰۴

مقایسه زنجیره مارکف مرتبه‌های اول، دوم و سوم جهت برآورد احتمال وقوع روزهای یخبندان در ایستگاه سینوپتیک بافت

نادیا شهرکی[۱]، صفر معروفی[۲]

تاریخ ارسال:۱۴۰۴/۰۵/۱۳
تاریخ پذیرش:۱۴۰۴/۰۸/۱۸

مقاله پژوهشی

چکیده

از آنجا که به دلیل آسیب‌های ناشی از پدیده یخبندان پتانسیل تولید بسیاری از محصولات کشاورزی و باغی در مناطق آسیب‌پذیر کشور کاهش می‌یابد، برآورد دوره‌های یخبندان بسیار اهمیت دارد. در این مطالعه به منظور مدلسازی یخبندان روزانه و توالی‌های مربوطه، از مدل زنجیره مارکف مرتبه های اول، دوم و سوم دو حالته استفاده گردید. بدین منظور از داده های حداقل دمای روزانه ایستگاه سینوپتیک بافت در ماه های سرد سال‌های ۱۳۷۳ تا ۱۴۰۳ استفاده شد. برای تعیین مناسب‌ترین مدل زنجیره مارکف از آزمون AIC استفاده شد. همچنین احتمال شرطی و تداوم روزهای یخبندان و بدون یخبندان، برای بازه زمانی ۲ تا ۵ روزه محاسبه گردید. نتایج بر اساس معیار AIC نشان داد که، مدل زنجیره مارکف مرتبه اول برای براورد وقوع یخبندان مناسب‌ترین مدل می‌باشد. همچنین نتایج به‌دست آمده از احتمال تداوم یخبندان ۲ تا ۵ روزه نشان داد که مقدار متوسط این تداوم به ترتیب با میزان ۳۰/۱۲، ۲۲/۹۲، ۱۷/۷۰ و۱۳/۷۸ درصد رخ داده است. احتمال تداوم پی‌در پی روز یخبندان ۲ تا ۵ روزه از روز ۲۲ تا ۱۰۰ جولیوسی (۱۲ آذر تا ۳۱ بهمن ماه) بیشتر از بقیه ایام سال می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ایستگاه سینوپتیک بافت، حداقل دمای روزانه، دوره بدون یخبندان، دوره یخبندان، زنجیره مارکف.

[۱] ، استادیار، گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه جیرفت، ایران. ایمیل: shahraki_n@ujiroft.ac.ir (نویسنده مسئول)
۲ - استاد، گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه بوعلی سینا، ایران. ایمیل: marofi@basu.ac.ir

مقدمه

وقوع یخبندان سبب خسارات و صدمات زیاد در بخش-های مختلف، مانند سخت شدن تردد و تصادفات اتومبیل‌ها، کمبود مواد غذایی در اثر آسیب به گیاهان و باغات و مراتع و ... می‌شود (زینالی و همکارن، ۱۴۰۱). خسارت یخبندان در کشاورزی هزینه زیادی برای کشاورزان در بردارد و برای امنیت غذایی جهانی تهدیدکننده است. پیش‌بینی به موقع رویدادهای یخبندان برای کاهش هزینه خسارت ناشی از یخبندان کشاورزی مهم است (Talsma et al., 2023). یخبندان معمولاً به‌صورت لایه‌ای از یخ روی سطح زمین و گیاهان می‌باشد (Chervenkov and Slavov 2022) در بعض مواقع یخبندان ممکن است بدون ایجاد لایه یخ رخ دهد، که برای پوشش گیاهی بسیار مخرب‌تر می‌باشد (Shammi et al., 2023; Drepper et al., 2022) کاهش دمای هوا به صفر درجه سانتیگراد و کمتر از آن را یخبندان گویند، که می‌تواند در بخش‌های مختلف محیط زیست به‌ویژه کشاورزی خسارات فراوانی ایجاد کند (فاطمی، ۱۴۰۰).

مدل زنجیره مارکف در علوم مختلف کاربرد وسیعی دارد. در زمینه برآورد روزهای یخبندان با استفاده از روش زنجیره مارکف مطالعات زیادی در جهان انجام گرفته است. واتکینز (۱۹۹۱) در انگلستان مرکزی تغییرات بلند مدت در طول فصل یخبندان با تحلیل دماهای روزانه، شروع و خاتمه یخبندان‌ها را مطالعه کرد. بوئر و همکاران (۱۹۹۳) یکی از مناطق گندم خیز استرالیا را بر اساس پنج ویژگی یخبندان، به چهار ناحیه همگن تقسیم کردند. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد که ارتفاع، مهمترین عامل پیش‌بینی کننده ویژگی‌های یخبندان است و عرض جغرافیایی و سایر عوامل در درجه بعدی اهمیت قرار دارند. مولر و همکارانش (۲۰۰۰) رابطه بین چرخه‌های انسو و فراوانی یخبندان رادر ناحیه مرکزی آرژانتین بررسی کردند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان داد که، به وسیله این چرخه می‌توان بخشی از تغییرپذیری فراوانی یخبندان را تشریح کرد. کونتینس (۲۰۰۰) بارش‌های رخ داده در درجه حرارت‌های یخبندان را برای ناحیه دریاچه-های پنجگانه ایالات متحده بررسی نمود. تات و ژنگ (۲۰۰۳) با استفاده از داده‌های ماهواره‌ای ویژگی‌های یخبندان ناحیه اوتاگو در کشور نیوزیلند را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین آن ها با استفاده از سیستم اطلاعات جغرافیایی نقشه‌های زمان آغاز و خاتمه یخبندان را برای این ناحیه تهیه کردند. مدلین و بلتراند (۲۰۰۵) پراکندگی مکانی یخبندان‌های دیررس بهاره و عوامل تأثیرگذار بر روی آن را در ناحیه تاکداری شمال فرانسه مطالعه کردند. آن‌ها در مقیاس‌های طول و عرض جغرافیایی عوامل محلی و توپوگرافی، عوامل تأثیرگذار بر پراکندگی مکانی یخبندان را مورد بررسی قرار دادند. کیم و باین (۲۰۱۶) در شبه جزیره کره به بررسی تغییرپذیری زمانی- مکانی یخبندان‌های دیررس درشبه جزیره کره پرداختند. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد که، در سال ۲۰۱۳ بیش‌ترین فراوانی یخبندان-های دیررس اتفاق افتاده است. همچنین بین یخبندان‌های زودرس با ارتفاع و عرض جغرافیایی همبستگی مثبت وجود داشت. ویتاس و همکاران (۲۰۱۸) تجزیه و تحلیل خطر یخبندان‌های بهاره بر درختان در سوئیس انجام دادند. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد که، در سال‌های ۱۹۷۵ تا ۲۰۱۶، فقط برای درختان واقع در ارتفاعات بیش از ۸۰۰ متر، خطر یخبندان‌های دیررس افزایش داشته است. تالاسما و همکاران (۲۰۲۳) برای پیش‌بینی وقوع یخبندان در بازه‌های زمانی کوتاه‌مدت در ایالتی در آمریکا از مجموعه‌ای از الگوریتم‌های یادگیری ماشین شامل شبکه‌های عصبی عمیق (DNN)، شبکه‌های کانولوشنی (CNN)و جنگل تصادفی (Random Forest) استفاده کردند. آن‌ها توانستند وقوع یخبندان از ۶ تا ۴۸ ساعت آینده را بادقت خوبی پیش‌بینی کنند. همچنین راجا (۲۰۲۵) مجموعه‌ای از روش‌های یادگیری ماشین را برای پیش‌بینی یخبندان در ایستگاه‌های هواشناسی هند استفاده کرد. نتایج نشان داد که بر اساس معیار پوشش (Recall)، الگوریتم K نزدیکترن همسایه (KNN) بالاترین دقت را در پیش‌بینی یخبندان داشته است، در حالی که الگوریتم درختان مازاد بر اساس مساحت زیر منحنی (AUC)، عملکرد بهتری نشان داد.

در ایران کمالی و صحرائیان (۱۳۸۴) وقوع سرما و یخبندان-های بهاره و پاییزه در استان آذربایجان شرقی را بررسی کردند.. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد که، اولین سرما و یخبندان پاییزه و آخرین سرما و یخبندان در استان آذربایجان شرقی رخ داده است. پدرام و همکاران (۱۳۸۶) به بررسی و تحلیل آغاز و خاتمه یخبندان‌های تابشی – فرارفتی و فرارفتی برای ۱۲ ایستگاه سینوپتیک استان‌های آذربایجان غربی و شرقی در یک دوره مشترک ۱۳ ساله پرداختند. نتایج تحقیقاتشان نشان داد که بطور میانگین یخبندان‌های فرارفتی در منطقه از ۶ تا ۴۰ روز دیرتر از یخبندان‌های تابشی- فرارفتی در پائیز آغاز گردیده و ۱ تا ۲۵ روز زودتر در بهار خاتمه می‌یابد. عساکره (۱۳۸۹) در شهر زنجان با استفاده از تکنیک زنجیره‌ی مارکف، احتمال تواتر و تداوم یخبندان‌های زودرس ودیرس برای ماه‌های مهر و فروردین طی سال های ۱۳۳۹ تا ۱۳۸۳ مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. نتایج نشان داد که احتمال وقوع یخبندان در هر روز فروردین ۰/۳۵ و برای مهر ماه ۰/۰۴ می‌باشد. شادمان و همکاران (۱۳۹۶) یخبندان های دیررس در باختر ایران با استفاده از زنجیره‌ی مارکف مدلسازی کردند. نتیجه مدلسازی آن‌ها نشان داد که تاریخ آغاز یخبندان دیررس بین ۷ تا ۱۵ اسفند در جنوب باختری منطقه، و بین ۱ تا ۱۵ اردیبهشت در شمال منطقه می‌باشد. همچنین شدت یخبندان‌های دیررس در جنوب باختری نیز بیشتر از شمال می‌باشد. رستمیان و حلبیان (۱۳۹۷) با کمک زنجیره مارکف مرتبه اول، احتمال تواتر و تداوم روزهای یخبندان در استان خراسان جنوبی را به‌دست آوردند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد که ایستگاه قائن در شمال و ایستگاه بیرجند در مرکز استان بیشینه رخداد و تداوم یخبندان و ایستگاه نهبندان کمینه رخداد یخبندان را تجربه کرده است. شهرکی و معروفی (۱۳۹۸) وقوع روزهای یخبندان وبدون یخبندان ایستگاه‌های همدان و ملایر را با استفاده از روش زنجیره مارکف مرتبه اول را بررسی کردند. نتایج بررسی آن-ها نشان داد که میانگین درصد احتمال وقوع دوره یخبندان متوالی ایستگاه‌های همدان و ملایر به ترتیب ۸۱/۰۶ و ۷۶/۷۳ بوده است، همچنین میانگین درصد احتمال وقوع روزهای یخبندان در این ایستگاه‌ها ۶۰/۱۱ و ۴۶/۹۹ بوده است.

در یک جمع‌بندی کلی، مشخص گردید بیشتر مطالعات انجام شده به خصوص در داخل کشور بر روی فراوانی و شدت وقوع یخبندان با استفاده از زنجیره مارکف مرتبه اول صورت گرفته است و در مورد احتمال وقوع دوره‌های کوتاه مدت یخبندان و تداوم یخبندان با استفاده از مرتبه‌های بالاتر مدل زنجیره مارکف، مطالعات بسیار اندکی انجام شده است. لذا در این مطالعه احتمال وقوع و تداوم یخبندان در طول دوره یخبندان با استفاده از زنجیره مارکف مرتبه‌های اول، دوم و سوم مطالعه شده است. هدف این تحقیق تعیین احتمال وقوع یخبندان‌های روزانه، و همچنین بدست آوردن تداوم آن با استفاده از بهترین مدل زنجیره مارکف و اطلاعات ایستگاه‌های سینوپتیک بافت می‌باشد.

مواد و روش‌ها

مناطق مورد مطالعه و داده‌های مورد استفاده

در این پژوهش از آمار حداقل دمای روزانه ایستگاه سینوپتیک بافت در طی سال‌های ۱۴۰۳-۱۳۷۳ استفاده شده است. احتمالات پیشامدهای متوالی روزهای یخبندان و بدون یخبندان با آستانه دمای صفر درجه سانتی‌گراد در روز برای ماه‌های سرد با استفاده از مدل زنجیره مارکف مرتبه‌های اول، دوم و سوم مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. این ایستگاه در عرض جغرافیایی ۲۹ درجه و ۱۴ دقیقه شمالی و طول جغرافیایی ۵۶ درجه و ۳۵ دقیقه شرقی و ارتفاع متوسط ۲۲۸۰ متر از سطح دریا واقع شده است و دارای اقلیم نیمه‌خشک فراسرد می‌باشد. پهنه‌بندی اقلیمی این ایستگاه در سیستم دومارتن گسترش یافته مشخص شده است (Khalili, 1997).

روش تحقیق

زنجیره‌ی مارکف و کاربرد آن

زنجیره‌ی مارکف روشی ریاضی، برای مدل‌سازی فرآیندهای احتمالاتی است. یک زنجیره‌ی مارکف با دو ویژگی فضای حالت و مرتبه شناخته می‌شود. اگر سیستم برای دمای روزانه تعریف شود، فضای حالت S در یک روز

معین یکی از دو وضعیت S={I,D} خواهد بود .که در آن D، معرف روز بدون یخبندان و I، معرف روز یخبندان است. مرتبه زنجیره مارکف مشخص می‌کند که حالت فعلی یک سیستم به چند حالت قبلی آن وابستگی دارد (رحیمی و همکاران، ۱۳۹۰). از این روی زنجیره مارکف مرتبه m با استفاده از رابطه (۱) بدست می‌آید (Daniel, 1985).

$$P_r\{X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \dots, X_1\} = P_r\{X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m}\} \quad (۱)$$

معادله ۱ بیان می‌کند که حالت یک متغیر در زمان t صرفاً به حالت آن در زمان‌های t-1, t-2, …, t-m وابسته است نه به مسیری که سیستم از طریق آن به حالت فعلی رسیده است.

احتمال انتقال (احتمال شرطی) زنجیره مارکف مرتبه m با استفاده از رابطه (۲) تعیین می‌گردد (Daniel, 1985).

$$p_{h\dots ijk} = \{\{X_{t+1} = k|X_t = j, X_{t-1} = i, \dots., X_{t-m} = h\}\} \quad (۲)$$

این احتمال همچنین بر اساس فراوانی شرطی، با استفاده از رابطه (۳) به‌دست می‌آید (Daniel, 1985).

$$p_{h\dots ij} = \frac{n_{h\dots ij}}{n_{h\dots i+}} \quad (۳)$$

از آنجایی‌که مقدار سری‌های زمانی در زمان t-(m-1)، برابر با $x_{t-(m-1)}=h$ و در زمان t، برابر $x_t=i$ بوده است، احتمال اینکه وقوع بارش در زمان t+1، برابر با $x_{t+1}=j$. باشد، $p_{h\dots ij}$است.

احتمالات ساده وقوع روزهای یخبندان و بدون یخبندان از رابطه‌های (۴) و (۵) بدست می‌آید (Mandal et al., 2015).

$$p_d = \frac{n_d}{n} \quad (۴)$$

$$p_i = \frac{n_i}{n} \quad (۵)$$

که در آن p_d (یا p_i) احتمال ساده وقوع روز بدون یخبندان یا یخبندان، n_d (یا n_i) تعداد دفعات بدون یخبندان یا یخبندان بودن روز مورد نظر و n تعداد سال‌های مورد بررسی است.

آزمون بررسی خصوصیات زنجیره مارکف

استقلال یا وابستگی روزهای یخبندان به‌یکدیگر با استفاده روابط (۶) و (۷) بدست می‌آید (Moon et al., 1994).

$$\propto = 2\sum_{I,j}^{m} n_{ij} \ln\left(\frac{p_{ij}}{p_j}\right) \quad (۶)$$

$$p_j = \sum_i^m n_{ij} / \sum_{i,j}^m n_{ij} \quad (۷)$$

نتیجه حاصل از روابط (۶) و (۷) برای مرتبه‌های اول، دوم و سوم زنجیره مارکف، با آزمون کای‌دو (χ^2) در سطح احتمالاتی ۰/۰۵ و درجه آزادی^{۲}(۱-m) بررسی شد. در این رابطه m تعداد کل حالت‌ها که در این مطالعه دو حالت یخبندان و بدون یخبندان می‌باشد، n_{ij} و p_{ij} به‌ترتیب بیانگر فراوانی و احتمال انتقال از حالت i به حالت j هستند و p_j بیان کننده احتمالات حاشیه‌ای برای ستون jام از ماتریس احتمالی انتقال است.

ایستا بودن زنجیره مارکف به این مفهوم است که وقوع بارندگی در دوره مطالعاتی، روند قابل ملاحظه‌ای ندارد. به‌عبارت دیگر در تمام دوره مطالعاتی احتمال وقوع بارندگی به یک میزان می‌باشد. در تحقیق حاضر بررسی ایستا بودن زنجیره، با استفاده از آزمون گردش(Run Test) توسط نرم افزار Minitab انجام شد و مشخص شد داده‌های بارش روزانه همگن و تصادفی هستند.

تعیین مناسب‌ترین مرتبه زنجیره مارکف

به‌منظور تعیین مناسب‌ترین مرتبه زنجیره مارکف آزمون‌های متعددی از قبیل آزمون AIC (Akaike Information Criterion, Akaike, 1974; Tong, 1975; Daniel, 1985) و آزمون BIC (Bayesian Information Criterion, Schwarz, 1978; Katz, 1981) استفاده می‌شود. در این مطالعه از آزمون AIC برای تعیین مناسب‌ترین مرتبه زنجیره مارکف استفاده شد و مقدار AIC بر اساس مقادیر درستنمایی زنجیره مارکف مرتبه اول (L_1)، دوم (L_2) و سوم (L_3) با استفاده از روابط

(۸ تا ۱۰) تعیین گردید (Daniel, 1985). معیار انتخاب بر اساس کم‌ترین مقدار AIC صورت گرفت.

$$L_1 = \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{s-1} n_{ij} \ln(p_{ij}) \quad (۸)$$

$$L_2 = \sum_{h=0}^{s-1}\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{s-1} n_{hij} \ln(p_{hij}) \quad (۹)$$

$$L_3 = \sum_{g=0}^{s-1}\sum_{h=0}^{s-1}\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{s-1} n_{ghij} \ln(p_{ghij}) \quad (۱۰)$$

$$AIC(m) = -2L_m + 2s^m(s-1) \quad (۱۱)$$

با تعیین ماتریس احتمال انتقال زنجیره مارکف تحلیل-های مختلفی که مهم‌ترین آن به‌دست آوردن احتمال تداوم متوالی روزهای بدون یخبندان یا یخبندان می‌باشد، می‌توان انجام داد. برای این منظور احتمال تداوم دو روز بدون یخبندان متوالی یا دو روز یخبندان پی‌درپی از معادلات ۱۲ و ۱۳ بدست می‌آید.

$$D_{(2)} = P_{D_{I_1}} \times P_{DD_{I_2}} \quad (۱۲)$$

$$I_{(2)} = P_{I_{I_1}} \times P_{II_{I_2}} \quad (۱۳)$$

همچنین احتمال تداوم سه روز بدون یخبندان متوالی یا سه روز یخبندان متوالی از معادلات ۱۴ و ۱۵ بدست می‌آید.

$$D_{(3)} = P_{D_{I_1}} \times P_{DD_{I_2}} \times P_{DD_{I_3}} \quad (۱۴)$$

$$I_{(3)} = P_{I_{I_1}} \times P_{II_{I_2}} \times P_{II_{I_3}} \quad (۱۵)$$

که در آن $P_{I_{I_1}}$ احتمال ساده وقوع روزهای یخبندان در روز اول و $P_{II_{I_2}}$ و $P_{II_{I_3}}$ احتمالات شرطی وقوع روزهای یخبندان در روزهای بعد است.

نتایج و بحث

در این مطالعه، احتمالات شرطی روزهای یخبندان و بدون یخبندان با استفاده از مدل زنجیره مارکف مرتبه اول، دوم و سوم برای ایستگاه سینوپتیک بافت محاسبه گردید، که در جداول ۱تا ۳ آورده شده است.

جدول(۱): احتمالات شرطی وقوع روزهای یخبندان و بدون یخبندان با استفاده از زنجیره مارکف مرتبه اول.

شماره روز جولیوسی	احتمالات شرطی (%)			
	P_{II}	P_{ID}	P_{DI}	P_{DD}
۱	۱۰۰	۰	۳	۹۷
۲	۰	۱۰۰	۱۱	۸۹
۳	۶۷	۳	۰	۱۰۰
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
۶۸	۹۱	۹	۵۷	۴۳
۶۹	۹۲	۸	۶۰	۴۰
۷۰	۸۱	۱۹	۲۵	۷۵
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
۱۳۷	۳۳	۶۷	۰	
۱۳۸	۰	۱۰۰	۰	۱۰۰
۱۳۹	۵۰	۵۰	۳	۹۷

جدول(۲): احتمالات شرطی وقوع روزهای یخبندان و بدون یخبندان با استفاده از زنجیره مارکف مرتبه دوم

احتمالات شرطی (%)								شماره روز جولیوسی
P_{DDD}	P_{DDI}	P_{DID}	P_{DII}	P_{IDD}	P_{IDI}	P_{IID}	P_{III}	
۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۱
۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۲
۹۳	۷	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۳
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
۱۰۰	۰	۰	۱۰۰	۱۰۰	۰	۱۹	۸۱	۶۸
۹۰	۱۰	۵۰	۵۰	۳۳	۶۷	۳۰	۷۰	۶۹
۸۰	۲۰	۰	۱۰۰	۴۰	۶۰	۰	۱۰۰	۷۰
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
۱۰۰	۰	۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۱۳۷
۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	۰	۱۳۸
۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۱۳۹

جدول(۳): احتمالات شرطی وقوع روزهای یخبندان و بدون یخبندان با استفاده از زنجیره مارکف مرتبه سوم

شماره روز جولیوسی	احتمالات شرطی (%)															
	P_{IIII}	P_{IIID}	P_{IIDI}	P_{IIDD}	P_{IDII}	P_{IDID}	P_{IDDI}	P_{IDDD}	P_{DIII}	P_{DIID}	P_{DIDI}	P_{DIDD}	P_{DDII}	P_{DDID}	P_{DDDI}	P_{DDDD}
۱	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۰	۱۰۰
۲	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۰	۱۰۰
۳	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۷	۹۳
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
۶۸	۷۰	۳۰	۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۲۵	۷۵	۷۵	۲۵	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۰	۱۰۰
۶۹	۱۰۰	۰	۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	۱۵	۸۵
۷۰	۹۲	۸	۵۰	۵۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۰	۱۰۰	۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	۰	۵۰	۵۰
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
۱۳۷	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	۰	۰	۱۰۰
۱۳۸	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۰	۱۰۰
۱۳۹	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۰	۱۰۰

انتخاب مرتبه مدل زنجیره مارکف براساس کمترین مقدار معیار AIC صورت گرفت. نتیجه معیار AIC در جدول ۴ آورده شده است.

جدول (۴): نتایج انتخاب مرتبه مدل زنجیره مارکف روزانه بر مبنای AIC

شماره روز جولیوسی	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم
۱	۸	۱۲/۷	۱۶
۲	۸	۲۳	۱۶
۳	۷/۸	۲۲/۷	۲۶
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
۶۸	۳۳/۷	۳۸/۹	۴۱
۶۹	۲۸/۳	۲۴/۷	۲۳/۵
۷۰	۲۷/۱	۳۲/۶	۲۹/۸
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
۱۳۷	۷/۸	۸	۱۶
۱۳۸	۴	۸	۱۶
۱۳۹	۱۰/۷	۸	۱۶

بر اساس نتایج بدست آمده از جدول ۴ مشخص گردید، مدل زنجیره مارکف مرتبه اول برای ایستگاه سینوپتیک بافت در ۷۰ درصد موارد بهتر از زنجیره مارکف مرتبه دوم و در ۵۹ درصد موارد بهتر از زنجیره مارکف مرتبه سوم بوده است. بنابراین از زنجیره مارکف مرتبه اول برای برآورد وقوع یخبندان روزانه استفاده شد.

همچنین از آزمون‌های معتبر جهت ارزیابی ماتریس تغییر حالت مارکفی و ایستایی بودن زنجیره مارکف استفاده شد. نتایج آزمون گردش توسط نرم‌افزار Minitab ایستایی بودن زنجیره را نشان داد. همچنین بر اساس آزمون کای‌دو مشخص گردید که در هر سطح دلخواه شواهد کافی برای پذیرش فرض صفر (استقلال داده‌ها و عدم پیروی از زنجیره مارکف دو حالته) وجود ندارد. از این‌رو فراوانی حالات انتقال از زنجیره مارکف دو حالتی پیروی می‌کند.

احتمال تداوم پی‌درپی روزهای یخبندان و بدون یخبندان با استفاده از مدل زنجیره مارکف انتخاب شده (زنجیره مارکف مرتبه اول) برآورد شد که نتایج آن در جدول ۵ ارائه شده است.

جدول (۵): احتمال تداوم پی‌درپی روزهای یخبندان و بدون یخبندان با استفاده از زنجیره مارکف انتخاب شده

شماره روز جولیوسی	روزهای یخبندان (%)				روزهای بدون یخبندان (%)			
	I5	I4	I3	I2	D5	D4	D3	D2
۱	۰	۰	۰	۰	۸۰	۸۶	۸۶	۸۶
۲	۰/۷	۲/۲	۴	۴	۸۷	۸۷	۹۳	۹۳
۳	۰	۱/۶	۵	۱۰	۷۵	۸۳	۸۳	۹۰
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
۶۸	۴۴	۴۸	۵۲	۵۷	۲	۵	۱۲	۲۵
۶۹	۳۸	۴۸	۵۲	۵۷	۲	۳	۸	۲۰
۷۰	۳۱	۴۱	۵۰	۵۵	۴	۵	۷	۱۷
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
۱۳۵	۰	۰	۱	۳	۸۱	۸۴	۸۴	۸۴
۱۳۶	۰	۰	۰	۰	۰	۹۷	۱۰۰	۱۰۰
۱۳۷	–	۰	۰	۰	–	۰	۸۷	۹۰
۱۳۸	–	–	۰	۲	–	–	۰	۹۳
۱۳۹	–	–	–	۰	–	–	–	۰

نتایج حاصل از جدول ۵ نشان داد که، میانگین احتمال تداوم یخبندان دو روزه ۳۰/۱۲ درصد، میانگین احتمال تداوم یخبندان سه روزه ۲۲/۹۲ درصد، میانگین احتمال تداوم یخبندان چهار روزه ۱۷/۷۰ درصد و میانگین احتمال تداوم یخبندان پنج روزه ۱۳/۷۸ درصد بوده است. همچنین مشخص شد با افزایش تداوم روزهای یخبندان، احتمال وقوع آن کاهش یافته است.

نتیجه‌گیری

پدیده یخبندان یکی از مهم ترین رخدادهای جوی در طبیعت است و اثرات آشکاری بر انرژی، ترابری و کشاورزی دارد، که در بین آنها بیشترین تاثیر یخبندان بر روی کشاورزی می‌باشد. بنابراین مطالعه روند و پیش بینی یخبندان و همچنین بررسی و تحلیل این پدیده ضروری است. در این تحقیق مقایسه مدل زنجیره مارکف مرتبه‌های اول، دوم و سوم جهت برآورد دوره‌های یخبندان و غیریخبندان بررسی گردید. بدین منظور، جهت تعیین ماتریس‌های انتقال جداگانه برای هر روز از سال دمای صفر درجه سانتی‌گراد به‌عنوان حد آستانه در نظر گرفته شد، به عبارت دیگر روزهای با دمای کمتر از صفر درجه سانتی‌گراد به عنوان روز یخبندان در نظر گرفته شده است. از معیار AICجهت انتخاب مناسب‌ترین مرتبه مارکف استفاده شد. بر اساس معیار AIC مشخص شد که مدل زنجیره مارکف مرتبه اول برای برآورد وقوع یخبندان روزانه مناسب‌ترین الگو می‌باشد. بر اساس این معیار، برتری مدل زنجیر مارکف مرتبه اول نسبت به مرتبه دوم و سوم به‌ترتیب ۷۰ و ۵۹ درصد بوده است. با توجه به نتایج حاصل از معیار AIC، مطالعه‌ی ویژگی‌های مهم مرتبط با دوره‌های یخبندان و بدون یخبندان کوتاه مدت همچون احتمالات شرطی و تداوم‌های ۲ تا ۵ روزه یخبندان و بدون یخبندان به کمک زنجیره‌ی مارکف مرتبه‌ی اول دو حالته از نتایج مهم این تحقیق می‌باشد. نتایج نشان داد که، میانگین احتمال تداوم یخبندان ۲ تا ۵ روزه به ترتیب با میزان ۳۰/۱۲، ۲۲/۹۲، ۱۷/۷۰ و ۱۳/۷۸ درصد رخ داده است. همچنین احتمال تداوم پی‌در پی یخبندان ۲ تا ۵ روزه از روز ۲۲ تا ۱۰۰

جولیوسی (۱۲ آذر تا ۳۱ بهمن ماه) بیشتر از بقیه ایام سال می باشد.

نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج مطالعه عساکره (۱۳۸۹) در شهر زنجان که با استفاده از زنجیره مارکف مرتبه اول احتمال تواتر و تداوم یخبندان را بدست آورد مقایسه گردید. نتایج مطالعه عساکره نشان داد که، احتمال وقوع یخبندان در شهر زنجان درماه فروردین بیشتر از ماه مهر می‌باشد، نتایج این مطالعه نشان داد که، احتمال تداوم پی‌در پی روز یخبندان ۲ تا ۵ روزه از روز ۲۲ تا ۱۰۰ جولیوسی (۱۲ آذر تا ۳۱ بهمن ماه) بیشتر از بقیه ایام سال می باشد. همچنین شهرکی و همکاران (۱۳۹۸) میانگین احتمال وقوع روزهای یخبندان را با کمک زنجیره مارکف مرتبه اول در ایستگاه سینوپتیک همدان و ملایر به‌ترتیب ۶۱ و ۴۷ درصد به‌دست آوردند. در این مطالعه میانگین احتمال وقوع روزهای یخبندان را با کمک زنجیره مارکف مرتبه اول ۴۰/۱۹ درصد می‌باشد. . از آنجایی‌که دماهای پایین تاثیرات مخربی بر روی تولیدات کشاورزی دارند، بنابراین از نتایج حاصل از این تحقیق جهت پیش‌بینی و جلوگیری از خسارات احتمالی وقوع یخبندان می‌توان استفاده کرد. پیش‌بینی احتمال وقوع و تداوم یخبندان با استفاده از مدل زنجیره مارکف برای کشاورزان و برنامه‌ریزان بخش کشاورزی این امکان را فراهم می‌کند، زمان کاشت محصولات حساس به سرما را تنظیم کنند و در طراحی تقویم زراعی منطقه تصمیم‌گیری دقیق‌تری داشته باشند.

منابع

پدرام، م.، ف. رحیم‌زاده و ف. صحرائیان. ۱۳۸۶. بررسی تغییرات طول دوره بدون یخبندان و تعداد روزهای یخبندان در استان‌های آذربایجان غربی و شرقی. مجله پژوهشی علوم انسانی دانشگاه اصفهان، جلد ۲۴، شماره ۳، ص ۸۸- ۷۵.

رحیمی، ج.، ن. قهرمان و ع. رحیمی. ۱۳۹۰. تحلیل آماری دوره‌های تر و خشک بارندگی هفتگی با استفاده از زنجیره مارکف به منظور برنامه‌ریزی کشاورزی دشت ورامین. مجموعه مقالات نخستین کنفرانس ملی هواشناسی و مدیریت آب کشاورزی، ۲- ۱ آذر ماه، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی دانشگاه تهران، تهران، ص ۱۰- ۱.

رستمیان، م و ا. ح. حلبیان. ۱۳۹۷. واکاوی آماری تواتر و تداوم روزهای یخبندان در استان خراسان جنوبی با بهره‌گیری از مدل زنجیرۀ مارکوف. فصلنامه علمی - پژوهشی برنامه‌ریزی فضایی (جغرافیا)، سال هشتم ، شماره ۲، ص ۶۰- ۳۹.

زینالی، ب.، م. فروتن و س. اخوت. ۱۴۰۱. بررسی همدید وسیع‌ترین و مستمرترین یخبندان‌های شمال غرب ایران. فصلنامه جغرافیا و مطالعات محیطی، سال نهم، شماره ۴۴، ص۱۶۱- ۱۴۸.

شادمان، ح.، م. جلالی و ف. لطیفی. ۱۳۹۶. پیشنهاد یک روش آماری - احتمالی برای شناسایی یخبندانهای دیررس (مطالعۀ موردی: یخبندانهای دیررس در باختر ایران). مطالعات علوم محیط زیست، سال دوم ،شماره ۱، ص ۱۱۰-۱۰۱.

شهرکی، ن.، و ص. معروفی. ۱۳۹۸. تحلیل وقوع روزهای عادی و یخبندان با روش زنجیره مارکف مرتبه اول (مطالعه موردی: ایستگاه‌های همدید همدان و ملایر). نشریه دانش آب و خاک، سال بیست و نهم، شماره ۲، ص ۲۲۵- ۲۱۳.

عساکره، ح. ۱۳۸۹. احتمال تواتر و تداوم یخبندان‌های زودرس و دیررس در شهر زنجان. مجله جغرافیا و برنامه‌ریزی محیطی، سال بیست و یکم، شماره ۱، ص ۱۶ -۱.

فاطمی، م. ۱۴۰۰. تحلیل فضایی توزیع زمانی و مکانی آغاز و خاتمه وقوع یخبندان در استان یزد. نشریه جغرافیا و برنامه‌ریزی، سال بیست و پنجم، شماره ۷۶، ص ۲۱۴ -۲۰۳.

Akaike, H. 1974. A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions on Automatic Control, 19: 716–723.

Boer, R., L.C. Campbell, and D.J. Fletcher. 1993. Characteristics of Frost in a Major Wheat– growing Region of Australia. Australian journal of agricultural research, 44(8): 1731-1743.

Chervenkov, H., and K. Slavov. 2022. Inter-annual variability and trends of the frost-free season characteristics over Central and Southeast Europe in 1950-2019. Journal of Central European Agriculture, 23(1), 154-164.

Continas, J. V. 2000. A Climatology of Freezing Rain in Great Lake region of North America. Monthly Weather Review, 128: 3574- 3588.

Daniel, S. 1985. Statistical Methods in the Atmospheric Sciences. Dep of soil, Crop and Atmospheric Sciences. ITHACA, Cornell Univ, New Yourk.

Drepper, B., A. Gobin, and J. Van Orshoven. 2022. Spatio-temporal assessment of frost risks during the flowering of pear trees in Belgium for 1971–2068. Agricultural and Forest Meteorology, 315, 108822.

Katz, R.W. 1981. On some criteria for estimating the order of a Markov chain. Technometrics, 23(3): 243–249.

Khalili, A. 1997. Integrated water plan of Iran. Meteorological studies, Ministry of power. Iran.

Kim, J.A. and H.R. Byun. 2016. Spatiotemporal variability of the latest frosts in Korean Peninsula and causes of atmospheric circulation. Meteorology and Atmospheric Physics, 128 (5): 663-675.

Madelin, M and G. Beltrando. 2005. Spatial Interpolation– Based Mapping of the Spring Frost Hazard in the Champagne Vineyards. Meteorological Applications, 12: 51-56.

Mandal, K.G., J. Padhi, A. Kumar, S. Ghosh, D.K. Panda, R.K. Mohanty and M. Raychaudhuri. 2015. Analyses of rainfall using probability distribution and Markov chain models for crop planning in Daspalla region in Odisha, India. Theoretical applied and climatology, 121: 517-528.

Moon, S.E., S.B. Ryoo and J.G. Kwon. 1994. A Markov Chain Model for Daily Precipitation Occurrence in South Korea. International Journal of Climatology, 14: 1009-1016.

Muller, G.V., M.N. Nunez and M.E. Seluchi. 2000. Relationship between ENSO Cycles and Frost Events within the Pampa Humeda Region. International journal of climatology, 20(13): 1619-1637.

Raj, S. 2025. Frost Forecasting through Machine Learning Algorithms. Earth Science Informatics, 18: 103–117.

Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. The annals of statistics, 6(2): 461–464.

Shammi, S., F. Sohel, D. Diepeveen, S. Zander, and M. G. Jones 2023. A survey of image-based computational learning techniques for frost detection in plants. Information Processing in Agriculture, 10(2): 164-191.

Tait, A and X. Zheng. 2003. Mapping Frost Occurrence Using Satellite Data. Journal of applied meteorology, 42(2): 193- 203.

Talsma, C. J., K. C. Solander, M. K. Mudunuru, B. Crawford and M. R. Powell. 2023. Frost Prediction using Machine Learning and Deep Neural Network Models. Frontiers in Artificial Intelligence, 5: 1-16.

Tong, H. 1975. Determination of the order of a Markov chain by Akaike's information criterion. Journal of Applied Probability, 12(3): 488–497.

Vitasse, Y., L. Schneider, C. Rixen, D. Christen and M.Rebetez. 2018. Increase in the risk of exposure of forest and fruit trees to spring frosts at higher elevations in Switzerland over the last four decades. Agricultural and Forest Meteorology, 248: 60-69.

Watkins, S.C. 1991. The Annual Period of Freezing Temperatures in Central England: 1850-1989. International Journal of Climatology, 11 (8): 889-896.