# حل عددی مساله نشت متلاطم با استفاده از الگوریتم جدید *DSC*

امیر زایری بغلانی نژاد
عضو هیات علمی، دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول
amir_zayeri@yahoo.com

محمد شکرالهی
عضو هیات علمی، دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول
m_shk@jsu.ac.ir

تاریخ ارسال: ۸۹/۵/۲۹ تاریخ پذیرش: ۸۹/۷/۲۰

## چکیده

در این تحقیق از الگوریتم نوین DSC[1] برای حل معادله غیر خطی حاکم بر نشت آب در محیط های متخلخل درشت دانه استفاده شده است. از آنجایی که معادله مذکور فاقد حل تحلیلی می باشد، نتایج با روش عددی احجام محدود مقایسه گردیده اند. مقایسه جوابها نشان می دهد که روش DSC ضمن اینکه انطباق خوبی با جوابهای احجام محدود دارد از سرعت همگرایی بسیار بالاتری برخوردار است.

**کلمات کلیدی:** الگوریتم DSC ، احجام محدود، نشت غیر دارسی، محیط متخلخل

1 -Discrete singular convolution

## مقدمه

به موازات پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر در ۵۰ سال اخیر روشهای عددی نیز نقش بسزایی در حل مسائل مهندسی پیدا کرده اند. یکی از جدیدترین روشهای عددی که در چند سال اخیر ابداع شده الگوریتم انتگرال هم پیچی منفرد مجزاست. این روش در سال ۱۹۹۹ برای اولین بار توسط وی[2] معرفی گردید (Wei,1999). روش مذکور کاربردهای زیادی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسائل مهندسی از قبیل مکانیک جامدات و مکانیک سیالات داشته است (Wei,2001a,2001b; Wan & Wei,2000; Wan et al,2002; Wei et al., 2001; Zhao et al.,2002).

یکی از مسائل مهم علم ژئوتکنیک بررسی حرکت آب در خاک های درشت دانه است که پایه و اساس طراحی بدنه سد های سنگریزه ای، طراحی سد های انحرافی واقع بر خاک های آبرفتی و مسائل زهکشی می باشد. در این حالت جریان آب در خاک متلاطم می باشد (Muskat, 1937). از آنجایی که در چنین محیط هایی قانون دارسی برقرار نیست، دو دسته روابط برای جریان آشفته آب در خاک توسط محققین ارائه شده است. دسته اول روابط بین گرادیان هیدرولیکی و سرعت بوده که به یکی از دو صورت زیر نوشته می شوند:

$$V = ai^b \qquad (۱)$$

$$i = a'V + b'V^2 \qquad (۲)$$

در زمینه بدست آوردن ثابت های $a,b,a',b'$ محققینی از قبیل (Ergun,1952، Wilkins,1956، Stephenson,1979، Martins,1991، Ward,1964، Slepicka,1961و Parkin,1963) تحقیقات گسترده ای انجام داده اند.

دسته دوم روابطی هستند که بین عدد رینولدز و ضریب اصطکاک دارسی وایسباخ ارائه شده اند. شکل کلی این روابط به یکی از دو صورت زیر است:

$$f = A\mathrm{Re}^B \qquad (۳)$$

$$f = \frac{A'}{\mathrm{Re}} + B' \qquad (۴)$$

(Venkataraman & Rao 1998)، (Li et. al. 1998)، (Herrera & Felton 1991) و (Samani et al. 2003) در زمینه تعیین ثابت های $A, B, A', B'$ تحقیق نموده اند.

به منظور حل مساله نشت متلاطم آب در خاک باید یکی از روابط فوق را با معادله پیوستگی جریان ترکیب نمود. که در نتیجه رابطه نهایی یک معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی خواهد بود (Samani et al., 2003). از آنجایی که معادله اخیر فاقد حل تحلیلی است، برای حل آن می بایست از روشهای عددی بهره جست. (Samani et al., 2003) با استفاده از روش عددی احجام محدود اقدام به این کار نمودند. در این تحقیق هدف آن است که ضمن حل مساله نشت متلاطم به شیوه عددی نوین DSC، کارایی، دقت و سرعت آن در مقایسه با روش متداول احجام محدود بررسی گردد.

## معادلات حاکم

معادله حاکم بر جریان آب در محیط های متخلخل رابطه ریچارد می باشد که شکل آن به صورت زیر است (Richards, 1931):

$$\frac{\partial(\rho_w V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_w V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_w V_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho_w n S_w)}{\partial t} = 0 \qquad (۵)$$

در رابطه فوق $V$ سرعت جریان، $\rho_w$ جرم مخصوص آب، $n$ پوکی خاک، $S_W$ درجه اشباع خاک و $t$ بعد زمان است. با اینکه همه سیستمهای جریان از لحاظ فیزیکی سه بعد دارند، ولی از آنجایی که حرکت آب در صفحات قائم موازی اساسا یکسان و مشابه است (Harr,1962) ، لذا برای سادگی محاسبات از بعد سوم $Z$ صرف نظر می شود. بنابراین با فرض محیط اشباع و جریان ماندگار، معادله پیوستگی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \qquad (۶)$$

2 -Wie

در این تحقیق برای حل مساله نشت متلاطم از ترکیب معادله پیوستگی جریان(۶) و رابطه نمایی بین سرعت و شیب هیدرولیکی(۱) استفاده شده است:

$$\frac{\partial(ai_x^b)}{\partial x}+\frac{\partial(ai_y^b)}{\partial y}=0 \qquad (۷)$$

با توجه به اینکه پارامترهای $a$ و $b$ برای یک محیط خاص مقادیر ثابتی می باشند (Parkin,1963)، معادله بالا به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$a\frac{\partial i_x^b}{\partial x}+a\frac{\partial i_y^b}{\partial y}=0 \qquad (۸)$$

$$abi_x^{b-1}\frac{\partial i_x}{\partial x}+abi_y^{b-1}\frac{\partial i_y}{\partial y}=0 \qquad (۹)$$

و از طرفی $i_x=-\frac{\partial h}{\partial x}$ و $i_y=-\frac{\partial h}{\partial y}$ است که $h$ بار آبی نقاط مختلف محیط خاک می باشد. لذا:

$$ab(\frac{\partial h}{\partial x})^{b-1}(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2})+ab(\frac{\partial h}{\partial y})^{b-1}(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2})=0$$

$$(\frac{\partial h}{\partial x})^{b-1}(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2})+(\frac{\partial h}{\partial y})^{b-1}(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2})=0 \qquad (۱۰)$$

رابطه اخیر شکل نهایی معادله دیفرانسیل غیر خطی حاکم بر نشت متلاطم می باشد.

**روش عددی هم پیچی منفرد مجزا (DSC)**

الگوریتم DSC برای اولین بار توسط وی معرفی شد (Wei,1990). در این روش مشابه سایر روشهای عددی دیگر جملات یک معادله دیفرانسیل بوسیله عبارات جبری تقریب زده می شوند که به این ترتیب معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری معمولی تبدیل می شود. اساس ریاضی الگوریتم DSC تئوری توزیع[۳] و موجک ها[۴] می باشد. درصورتی که T تابع توزیع و $\eta(t)$ المانی از فضای تابع آزمون باشد، در این صورت انتگرال هم پیچی $T,\eta$ به صورت زیر تعریف می گردد (Zhao et al.2002).

$$F(t)=(T*\eta)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}T(t-x)\eta(x)dx \qquad (۱۱)$$

در این رابطه $T(t-x)$ هسته منفرد نامیده می شود. از هسته های منفرد مختلفی در الگوریتم DSC استفاده می شودکه یکی از کارآمدترین آنها هسته تنظیم شده شانون[۵] (RSK) می باشد (Wei, 2001; Wan & Wei, 2000; Wan et al. 2002; Wei et al., 2001; Zhao et al., 2002). هسته RSK به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta_{\Delta,\sigma}(x-x_k)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_k)}{\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_k)}\exp\left[\frac{(x-x_k)}{2\sigma^2}\right] \qquad (۱۲)$$

در این رابطه $\Delta$ فاصله بین نقاط شبکه بندی و $\sigma$ پارامتر تنظیم کننده هسته شانون است که به مقدار $\Delta$ بستگی دارد.

جهت استفاده از انتگرال هم پیچی با تقریبی مناسب می توان رابطه (۱۱) را به صورت منقطع شده زیر نوشت (Wei,2001):

$$F_\alpha(t)=\sum_k T(t-x_k)f(x_k) \qquad (۱۳)$$

در این رابطه $F_\alpha(t)$ تقریب انتگرال هم پیچی $F(t)$ است و $\{x_k\}$ مختصات نقاط شبکه بندی می باشد که معادله حاکم روی آنها تعریف می گردد.

اگر تابع $F(x)$ مجهول مساله باشد، برای استفاده از روش DSC این تابع منقطع شده و مشتقات آن باید در یک محیط شبکه بندی شده در نقاط $x_i$ روی بازه $[x-x_m, x+x_m]$ تخمین زده شوند. این تخمین به کمک شکل منفصل شده انتگرال هم پیچی معادله(۱۱) صورت می پذیرد. به عبارت ساده تر برای مشتق مرتبه $n$ام تابع $F(x)$ می توان نوشت (Wan et al.,2002):

3-Distribution
4-Wavelets
5-Regularized Shannon kernel

$$\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_i} = f^n(x_i) \approx \sum_{k=-m}^{m} \delta^n_{\Delta,\sigma}(x_i - x_k) f(x_k);\ n=0,1,2,\ldots \qquad (۱۴)$$

در این رابطه $f(x_k)$ مقدار تابع مورد نظر در نقاط شبکه بندی شده روی بازه $[x-x_m, x+x_m]$ و $\delta^n_{\Delta,\sigma}(x_i - x_k)$ مشتق مرتبه $n$ ام هسته مورد استفاده است که در بازه محاسباتی به عرض $2m+1$ تعریف می گردد.

مشتقات مرتبه اول و دوم هسته شانون (RSK) به صورت زیر تعریف می گردد (Wei, 2001b):

$$\delta^{(1)}_{\Delta,\sigma}(x_m - x_k) = \frac{\cos\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{(x-x_k)}\exp\left(\frac{-(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)^2}\exp\left(\frac{-(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (۱۵)$$

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}_{\Delta,\sigma}(x_m - x_k) = &-\frac{(\frac{\pi}{\Delta})\sin\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{(x-x_k)}\exp\left(\frac{-(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right) - 2\frac{\cos\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{(x-x_k)^2}\exp\left(\frac{-(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right)\\ &-2\frac{\cos(\frac{\pi}{\Delta})(x-x_k)}{\sigma^2}\exp\left(\frac{-(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right) + 2\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)^3}\exp\left(\frac{-(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right)\\ &+\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)\sigma^2}\exp\left(\frac{-(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}\sigma^4}(x-x_k)\exp\left(\frac{-(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

$$\delta^{(1)}_{\Delta,\sigma}(0) = 0 \qquad (۱۷)$$

$$\delta^{(2)}_{\Delta,\sigma}(0) = -\frac{1}{\sigma^2} - \frac{\pi^2}{3\Delta^2} \qquad (۱۸)$$

## منقطع سازی و حل معادله به روش هم پیچی منفرد مجزا

برای استفاده از روش DSC ابتدا باید محیط محاسباتی گره بندی شود سپس معادله حاکم منقطع سازی گردد و رابطه بدست آمده برای تک تک گره ها نوشته شود که منجر به یک دستگاه معادلات جبری غیر خطی خواهد شد.

برای منقطع سازی معادله(۱۰) جملات $\frac{\partial h}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ به وسیله معادله(۱۴) تقریب زده می شوند، در نتیجه معادله حاکم به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=-m_x}^{m_x}\delta^{(1)}_{\Delta,\sigma}(x_{i,j}-x_{i+k,j})h(i+k,j)\right)^{b-1}\left(\sum_{k=-m_x}^{m_x}\delta^{(2)}_{\Delta,\sigma}(x_{i,j}-x_{i+k,j})h(i+k,j)\right)\\ &+\left(\sum_{k=-m_y}^{m_y}\delta^{(1)}_{\Delta,\sigma}(y_{i,j}-y_{i,j+k})h(i,j+k)\right)^{b-1}\left(\sum_{k=-m_y}^{m_y}\delta^{(2)}_{\Delta,\sigma}(y_{i,j}-y_{i,j+k})h(i,j+k)\right)=0\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

جهت تعیین بار آبی در هر نقطه می بایست پارامتر $h(i,j)$ از معادله بالا فاکتور گرفته شود. جهت حل عددی به روش الگوریتم تکرار[6]، معادله(۱۹) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

6- Iteration Algorithm

(۲۰)

$$h(i,j) = -\frac{B_x(T_{x1}+T_{x2})+B_y(T_{y1}+T_{y2})}{B_x\delta_{\Delta x}^{(2)}(0)+B_y\delta_{\Delta y}^{(2)}(0)}$$

در رابطـه بـالا پارامترهـای $B_x, B_y, T_{1x}, T_{1y},, T_{2x}, T_{2y}$ بـه صورت زیر تعریف می شوند:

(۲۱)

$$B_x = \left[\sum_{-m_x}^{+m_x}\delta_{\Delta x}^{(1)}(x_{i,j}-x_{i+k,j})h(i+k,j)\right]^{b-1}$$

$$B_y = \left[\sum_{k=-m_y}^{+m_y}\delta_{\Delta y}^{(1)}(y_{i,j}-y_{i,j+k})h(i,j+k)\right]^{b-1} \quad (۲۲)$$

$$T_{1x} = \sum_{k=-m_x}^{-1}\delta_{\Delta x}^{(2)}(x_{i,j}-x_{i+k,j})h(i+k,j) \quad (۲۳)$$

$$T_{2x} = \sum_{k=1}^{+m_x}\delta_{\Delta x}^{(2)}(x_{i,j}-x_{i+k,j})h(i+k,j) \quad (۲۴)$$

$$T_{1y} = \sum_{k=-m_y}^{-1}\delta_{\Delta y}^{(2)}(y_{i,j}-y_{i,j+k})h(i,j+k) \quad (۲۵)$$

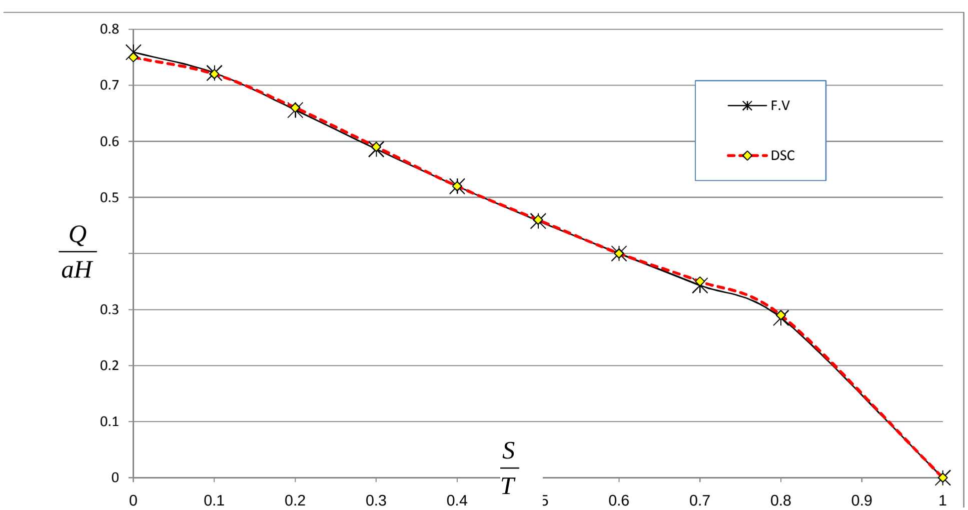
$$T_{2y} = \sum_{k=1}^{+m_y}\delta_{\Delta y}^{(2)}(y_{i,j}-y_{i,j+k})h(i,j+k) \quad (۲۶)$$

## ارائه نتایج

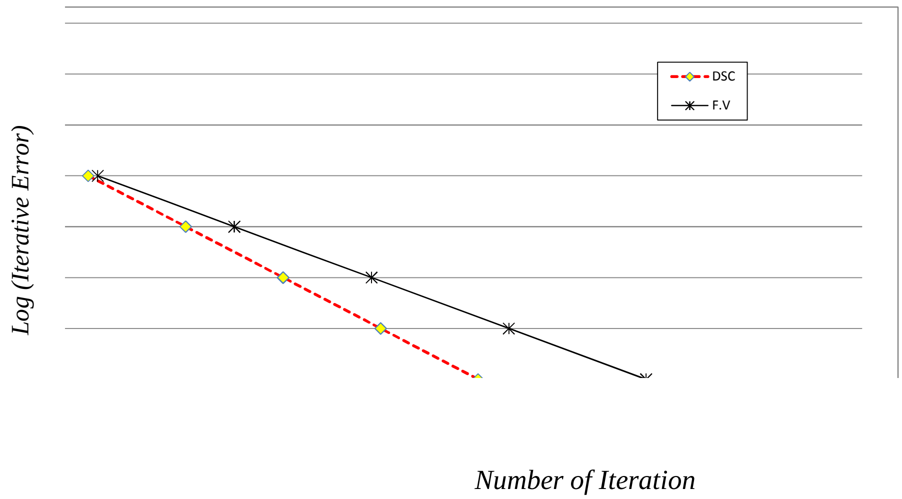
در این تحقیق مساله نشت متلاطم برای پی چنـدین سـد بتنی به دو روش عددی احجام محدود و DSC حل گردید. جهت مقایسه نتایج، مقدار دبی عبوری از محیط زیر سدها محاسـبه و در نمـودار(۱) ترسـیم شـد. در ایـن نمـودار تغییرات $\frac{Q}{aH}$ در مقابل $\frac{S}{T}$ ترسیم شده اسـت کـه در آن Q، دبی عبوری از محیط زیر سد، H، اختلاف بار آبی بالا و پایین دسـت سـد، $a$، ضـریب غیـر دارسـی بکـار رفتـه در معادله(۱) با استفاده از داده های پارکین(Parkin,1963) ، $S$، عمق سپر آب بند و $T$، عمق لایه نفوذپذیر می باشند.

نمودار شکل(۱) نشان می دهد کـه انطبـاق بسـیار خـوبی بین نتایج دو روش عددی وجود دارد.

از آنجایی که معادله حاکم بر مساله، یک رابطه غیر خطـی است جهت حل آن با هر کدام از روشهای احجام محدود و هم پیچی منفرد مجزا از الگوریتم تکرار استفاده شده است. در این الگوریتم عملیات تکرار تا رسیدن به مقـدار خطـای مشخصی ادامه می یابد. به منظور مقایسه سرعت همگرایی دو روش عددی تعداد تکرارها به ازای مقادیر مختلف خطـا ثبت گردید. شکل(۲) نشـان دهنـده سـرعت همگرایـی دو روش مـذکور بـه ازای مقـادیر مختلـف خطـای عـددی در الگوریتم تکرار می باشد.




**شکل ۱- مقایسه نتایج روش هم پیچی منفرد مجزا و احجام محدود**




**شکل ۴ مقایسه سرعت همگرایی روش هم پیچی منفرد مجزا و احجام محدود**

## نتیجه گیری

در این تحقیق مساله نشت متلاطم برای فنداسیون چند سد بتنی با استفاده از دو روش عددی احجام محدود و هم پیچی منفرد مجزا حل گردید.

پیش از این روش احجام محدود توانایی خود را در حل مساله نشت متلاطم نشان داده است (Samani et al,2003). همانطور که از شکل(۱) مشخص است، شیوه نوین DSC انطباق خوبی با جوابهای احجام محدود دارد. علاوه بر آن با توجه به شکل(۲) روش DSC از سرعت همگرایی بسیار بالاتری برخوردار است. این امر بخصوص در مسائلی که زمان زیادی جهت حل نیاز دارند، شایان تامل است. علت سرعت همگرایی بالای این روش را می توان در رابطه(۲۰) بررسی کرد. همانطور که از رابطه مشخص است برای تعیین مقدار پارامتر مورد نظر در یک گره، از 2m گره اطراف آن استفاده می شود که در رسیدن سریعتر به مقدار نهایی آن گره تاثیر بسزایی دارد.

## قدردانی

با تشکر از آقای پروفسور وی استاد دانشگاه ایالت میشیگان که با راهنمایی صمیمانه خود اینجانبان را یاری نمودند.

## منابع


1. Ergun, S., (1952), "Fluid Flow Through Packed Columns", Chemical Engng. Progress, 48, 2, 89.
2. Harr, M. E., (1962), "Groundwater and Seepage", McGraw-Hill, New York.
3. Herrera, N. M. and Felton, G. K., (1991), "Hydraulics of Flow Through Rockfill Dam Using Sediment- Water", Trans. Of ASCE, 34, 3, 871- 875.
4. Li, B., and V. K., Garga, and M. H., Davies, (1998), "Relationships for Non- Darcy Flow in Rockfill", J. of Hydro. Engng. Div. ASCE, 124, 2, 206- 212.
5. Martins, R., (1991), "Principles of Rock fill Hydraulics", Advances in Rock fill Structures, E. M. Das Neves, e.d, Kluwer Academic Publishers Group, Boston, Mass, 523-570.
6. Muskat, M., (1937), "The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media", McGraw- Hill, New York, USA.
7. Parkin, A. K., (1963), "Rockfill Dams With inbuilt Spillway", Bull. No.6, Water resources Edn. Melbourne, Australia.
8. Richards, L. A., (1931), "Capillary conduction of liquids through porous mediums", Physics, 1, 318- 333.

9. Samani, H. M. V., and Samani, J. M. V., and Shaiannejad, M., (2003), "Reservoir Routing Using Steady and Unsteady Flow Through Rock fill dams", ASCE, J. of Hydro. Engng, Vol.129, No. 6, pp. 448-454.
10. Slepicka. F., (1961), "The Law of Filtrations and Limits of their Validity", IAHR, 9th Cong. Yugoslavian assn. of Hydro.Res., Belgrade, Yugoslavia, 383- 394.
11. Stephenson, D., (1979), "Rock fill in Hydraulic Engineering", Elsevier Science Publishers, New York, USA.
12. Venkataraman, P., and Rao, R. M., (1998), "Darcian, Transitional and Turbulent Flow Through Porous Media", Hydro. Engng. Div. ASCE, 124, 8, 840-846.
13. Wan, D. C., and Wei,G.W., (2000), "Numerical study of Euler and Navier-Stokes Equations by Efficient Discrete Singular Convolution Method", ACTA Mech. Sin. 16, 223.
14. Wan,D. C., and Zhou,Y. C., and Wei,G.W., (2002), "Numerical solutions for unsteady incompressible flow using discrete singular convolution method", Int. J. Numer. Methods Fluids 38, 789.
15. Ward, J. C., (1964), "Turbulent Flow in Porous Media", J. of Hydro. Engng. Div. ASCE, 92, 4, 1-12.
16. Wei, G. W., (1988), "Quasi-wavelets and quasi interpolating wavelets", Chem. Phys. Lett. 296 215- 222.
17. Wei, G.W. (1999), "Discrete singular convolution for the Fokker-Planck equation", J. Chem. Phys. 110, 8930-8942.
18. Wei, G.W., (2001), "Vibration analysis by discrete singular convolution", J. Sound Vibration 244, 535- 553.
19. Wei, G.W., (2001), "Discrete Singular Convolution for Beam Analysis". Eng Struct; 23:1045–53.
20. Wei,G.W., and Zhao,Y.B., and Xiang,Y., (2001), "The determination of the natural frequencies of rectangular plates with mixed boundary conditions by discrete singular convolution" , Int. J. Mech. Sci, 43,1731-1746.
21. Wilkins, J. K., (1956), "Flow of Water Through Rockfill and its Application to the Design of Dams", Proc, 2nd Australia New Zealand Conf on Soil Mech. And Found. Engng. New Zealand, 144- 149.
22. Zhao, Y.B., and Wei,G.W., and Xiang,Y., (2002), "Discrte Singular Convolution for the Prediction of High Frequency Vibration of Plates", Int, J. Solids, structures, 39, 65- 88.

## Numerical Solution of Turbulent leakage problem by using new algorithms DSC

Zayeri Baghlani Nejad, A., Shkrollahi, M.

**Abstract**
In this paper, the discrete singular convolution is applied to non-darcian seepage equation in porous media which is non linear. Since the equation does not have analytical solution, results have been verified with finite volume method. According to the results, DSC method has high conformity with F.V method; moreover the convergence ratio of DSC is much higher.
**Keywords:** Discrete singular convolution, Finite volume, Non- darcian seepage, Porous media