

## مدل سازی دما و بارش تبریز با بکارگیری توابع مفصل

هادی ثانی خانی<sup>۱\*</sup>، رسول میرعباسی نجفآبادی<sup>۲</sup>، یعقوب دین پزوه<sup>۳</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۲/۲۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۶/۲۶

### چکیده

به طور کلی توزیع احتمالاتی داده‌های تصادفی چند متغیره در مقایسه با حالت یک متغیره آن‌ها به دلیل وابستگی غیرخطی بین متغیرهای تصادفی، پیچیده‌تر است. یکی از روش‌های حل این مشکل استفاده از توابع مفصل می‌باشد که در سال‌های اخیر بیشتر مورد توجه محققین بوده است. در این مطالعه، وابستگی دما و بارش ایستگاه تبریز با استفاده از توابع مفصل مدل‌سازی شد. برای این منظور از داده‌های بارش و دمای ماهانه ایستگاه تبریز در دوره آماری ۱۳۸۷-۱۳۵۰ استفاده شد. ابتدا توزیع‌های تک متغیره مناسب برای بارش و دما بر مبنای تست کولموگروف-اسمیرنف به ترتیب نمایی و مقدار حدی تعمیم یافته (GEV) انتخاب شدند. سپس سه تابع مفصل کلایتون، گامبل و فرانک برای ایجاد توزیع دومتغیره بارش و دمای ایستگاه تبریز مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که عملکرد هر سه تابع مفصل نزدیک به هم بوده ولی با توجه به اینکه از بین سه تابع مفصل مورد بررسی، فقط مفصل فرانک قابلیت مدل کردن وابستگی‌های منفی را دارا می‌باشد، بنابراین به عنوان تابع مفصل مناسب جهت مدل کردن وابستگی بارش و دمای ایستگاه تبریز انتخاب گردید.

واژه‌های کلیدی: بارش، تبریز، تحلیل دومتغیره، دما، مفصل.

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب، عضو باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ساوه، ایران

<sup>۲</sup> استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد

<sup>۳</sup> دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز

\*آدرس پست الکترونیکی (hsanikhani12@gmail.com) (نویسنده مسئول)

## مقدمه

با متغیرهایی از این دست که از توزیع نرمال چندمتغیره تبعیت نمی‌کنند، چگونه باید رفتار کرد؟

یک روش مناسب در این خصوص استفاده از توابع مفصل<sup>۱</sup> می‌باشد. از جمله مزیت‌های توابع مفصل مدل‌سازی توزیع پیوسته متغیرهای تصادفی با در نظر گرفتن توزیع‌های حاشیه‌ای هر یک از متغیرها و ساختار همبستگی آن‌ها می‌باشد (آقاچوک و همکاران، ۲۰۱۱). با این وجود دامنه مطالعات انجام شده با استفاده از توابع مفصل در علوم مختلف از جمله هیدرولوژی محدود می‌باشد و بیشتر مطالعات به یک دهه اخیر باز می‌گردد که در ادامه به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌گردد.

توابع مفصل در مطالعات هیدرولوژی اولین بار بوسیله دی میکله و سالوادوری (۲۰۰۳) برای تحلیل فراوانی بارش بکار برده شدند. آن‌ها از داده‌های بارش ساعتی ۷ سال (از ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۶) دو ایستگاه باران‌سنجی در لاپرسا (ایتالیا) در ایجاد یک مدل دومتغیره برای رگبارها استفاده نمودند که در آن توزیع پارتوی تعمیم یافته برای توصیف حاشیه‌های شدت و مدت رگبار انتخاب گردید و خانواده فرانک از مفصل‌های ارشمیدسی برای ایجاد ساختار وابستگی بین مدت و شدت متوسط بارش بکار گرفته شد. این مطالعه بعداً در سطح سه متغیره در مقاله سالوادوری و دی میکله (۲۰۰۶) بسط داده شد که دوره خشک بین رویدادهای بارش به عنوان متغیر سوم اضافه گردید.

گریمالدی و سرینالدی (۲۰۰۶) به منظور مطالعه رفتار بارش‌های حدی، ارتباط بین سه مشخصه بارش شامل عمق بحرانی، عمق کل واقعی و شدت حداکثر بارش‌های نیم ساعته ۱۰ ایستگاه باران‌سنجی در اومبریا (ایتالیا) از ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۱ را بوسیله یک مفصل سه بعدی بررسی کردند. ژانگ و سینگ (b,a,2007) تحلیل چندمتغیره برای رویدادهای بارش حدی را بوسیله مفصل‌ها انجام دادند. داده‌های بارش ساعتی از سه ایستگاه باران‌سنجی در حوضه رودخانه آمیت در لوئیزیانا (ایالات متحده) در یک دوره ۴۲ ساله تحلیل گردید. مدل‌های بارش دومتغیره بین عمق کل (حجم)، مدت و شدت متوسط ایجاد گردیدند.

یکی از موضوعات مورد توجه در مطالعات اقلیمی تخمین توابع احتمالاتی چندمتغیره می‌باشد. دلیل این توجه شاید پیچیدگی و بهم‌پیوستگی سیستم‌های اقلیمی است که هر یک از اجزای آن رفتار استوکاستیک از خود نشان می‌دهند. لذا می‌توان گفت سیستم‌های اقلیمی چندبعدی بوده و رفتاری غیرخطی از خود نشان می‌دهند. متغیرها و پارامترهای موثر در تغییرات اقلیمی متغیرهای تصادفی بوده و در قالب توزیع‌های احتمالاتی و یا توابع چگالی احتمالاتی توصیف می‌شوند (اکمان و روله، ۱۹۸۵). در بین متغیرهای اقلیمی، بارش و دما از اهمیت بسزایی برخوردارند و شبیه‌سازی دقیق بارش و دما در مطالعات هواشناسی و کشاورزی از اهمیت زیادی برخوردار است. با این وجود شبیه‌سازی بارش و دما به دلیل وجود همبستگی درونی بین آن‌ها مشکل است (تانارته و همکاران، ۲۰۱۲).

به لحاظ زمانی، همبستگی بین بارش و دما در ماه‌های مختلف سال تغییر می‌کند. راجی وان و همکاران (۱۹۹۸) به بررسی رابطه زمانی بارش و دمای سطح زمین پرداختند. مطالعات آن‌ها نشان داد که همبستگی بارش و دما در ماه‌های ژانویه و می مثبت و در ماه جولای منفی می‌باشد. هانگ و همکاران (۲۰۰۹) در مطالعات خود به وجود همبستگی منفی بین بارش و دما در حوضه رودخانه زرد در چین اشاره کردند. به لحاظ مکانی همبستگی قابل توجهی بین بارش و دما در نواحی گرمسیری وجود دارد.

آلدریان و سوسانتو (۲۰۰۳) به بررسی روابط بین بارش و دمای سطح دریا پرداختند. یافته‌های آن‌ها حاکی از آن بود که تغییرات بارش در اندونزی تحت تاثیر دمای اقیانوس‌های هند و آرام که در مجاورت آن قرار دارند، می‌باشد.

جهت محاسبه همبستگی درونی بارش و دما لازم است تا روش‌های احتمالاتی چندمتغیره مورد استفاده قرار گیرند. در گذشته بکارگیری توابع احتمالاتی چندمتغیره محدود به توزیع نرمال چندمتغیره و یا ترکیبات آن بود (ویلکس، ۲۰۱۱). همچنین اغلب متغیرهای اقلیمی نظیر بارش، رطوبت، سرعت باد و دما از توزیع‌های آماری دارای چولگی تبعیت می‌کنند. حال سوال اساسی این است که

سال‌های ۱۹۱۹ تا ۲۰۰۰ را به عنوان سطح آستانه در نظر گرفتند. سانگ و سینگ (۲۰۱۰) برای تحلیل فراوانی خشکسالی داده‌های بارش ماهانه یک ایستگاه باران‌سنجی در تکزاس، ایالات متحده از مفصل‌های دوبعدی استفاده نمودند. بدین منظور، آن‌ها چندین مفصل نیمه بیضوی<sup>۱</sup> و مفصل‌های گامبل-هوگارد، علی-میخائیل-حق، فرانک و کلایتون برای تعیین بهترین مفصل مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها سه مشخصه خشکسالی شامل شدت، مدت و زمان بین آغاز دو خشکسالی را بر اساس تئوری ران تعیین و به صورت دو به دو با انواع توابع مفصل مدل کردند.

آفاکوچک و همکاران (۲۰۱۰) از توابع مفصل نوع بیضوی به منظور شبیه‌سازی همبستگی مکانی بارش استفاده کردند و دریافتند که استفاده از تابع مفصل  $t$  در مقایسه با تابع گوسی عملکرد قابل‌قبول‌تری جهت شبیه‌سازی بارش‌های حدی دارد. لاکس و همکاران (۲۰۱۱) با بکارگیری تابع مفصل کلایتون به بررسی توزیع دومتغیره شدت و مدت خشکسالی پرداختند. میرعباسی و همکاران (۲۰۱۲) از توابع مفصل جهت تحلیل فراوانی خشکسالی در ایستگاه شرفخانه در شمال غربی ایران استفاده کردند و تابع مفصل گالامبوس را به عنوان تابع شاخص جهت مدل‌سازی شدت و مدت خشکسالی در این ایستگاه معرفی نمودند.

در تنها مطالعه انجام شده در خصوص مدل‌سازی همزمان متغیرهای اقلیمی با استفاده از توابع مفصل می‌توان به مطالعات اسچولزل و فردریچ (۲۰۰۸) اشاره نمود که از یک مدل ساده بر مبنای توابع مفصل، به بررسی رابطه بارش و سرعت باد در مقیاس روزانه پرداختند. آن‌ها در مطالعات خود طیف وسیعی از توابع مفصل شامل توابع مفصل از نوع ارشمیدسی، نیمه بیضوی و نرمال را جهت مدل‌سازی بارش و سرعت باد در دو ایستگاه پستدام و برلین در کشور آلمان به کار گرفتند. نتایج حاصله حاکی از عملکرد قابل قبول توابع مفصل در محدوده مورد بررسی بود و توابع مفصل به عنوان ابزای کاربردی و مفید در مطالعات اقلیم‌شناسی معرفی نمودند. در این تحقیق به بررسی رابطه بین بارش و دما در شهر تبریز پرداخته می‌شود. بدین منظور از چندین تابع مفصل جهت مدل‌سازی توزیع توام بارش و دما استفاده

سرنالدی (۲۰۰۸) نیز در مطالعه‌ای دیگر به بررسی همبستگی مکانی متغیر بارش پرداخت و عملکرد توابع مفصل را در این خصوص مناسب و قابل قبول گزارش نمود. فاور و همکاران (۲۰۰۴) مفصل‌ها را برای تحلیل فراوانی سیلاب چندمتغیره برای دو حوضه در کبک کانادا بکار بردند. ریسک سیلاب ترکیبی چندین حوضه و توزیع توأم جریان‌های حداکثر و حجم مورد بحث قرار گرفت. دو خانواده از مفصل‌های ارشمیدسی (فرانک و کلایتون)، مفصل‌های مستقل و فارلی-گامبل-مورگنسترن مورد بررسی قرار گرفتند. آن‌ها نشان دادند که احتمال شرطی حجم‌های سیلاب، زمانی که با نتایج تک متغیره مقایسه می‌شود، کاملاً متفاوت است. بنابراین، وقتی که رفتار توأم در نظر گرفته می‌شود، دوره‌های بازگشت سیلاب‌های طراحی متفاوت خواهند بود.

دی میکله و همکاران (۲۰۰۵) از خانواده گامبل مفصل‌های ارشمیدسی برای مدل کردن وابستگی بین حداکثرهای سیلاب و حجم‌های سیلاب استفاده نمودند. این دو حاشیه بوسیله توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته تحلیل گردید و یک مدل دومتغیره برای محاسبه هیدروگراف‌های سیلاب برای یک دوره بازگشت معین ایجاد شد و با مدل مخزن خطی برای ارزیابی کفایت اندازه سرریز سد سیپو مادرلی در شمال ایتالیا ترکیب گردید. شیائو (۲۰۰۶) توزیع توأم مدت و شدت خشکسالی‌های یک ایستگاه باران‌سنجی در واشنتو (تایوان) تعریف شده با شاخص بارش استاندارد (SPI) را با استفاده از مفصل‌های دوبعدی مدل کرد. توزیع فراوانی مدت و شدت خشکسالی به ترتیب نمایی و گاما فرض شدند. او هفت نوع مفصل شامل مفصل‌های علی-میخائیل-حق، کلایتون، فارلی-گامبل-مورگنسترن، فرانک، گالامبوس، گامبل-هوگارد و پلاکت را برای ایجاد توزیع دومتغیره شدت و مدت خشکسالی مورد بررسی قرار داد و نتیجه گرفت که مناسب‌ترین مفصل برای تحلیل دومتغیره شدت و مدت خشکسالی در ایستگاه مورد مطالعه مفصل گالامبوس می‌باشد.

شیائو و همکاران (۲۰۰۷) ارزیابی شدت-مدت خشکسالی هیدرولوژیکی رودخانه زردچین با استفاده از مفصل دوبعدی کلایتون انجام دادند. آن‌ها برای تعریف خشکسالی هیدرولوژیکی از تئوری ران استفاده نمودند و میانگین بلندمدت دبی ماهانه این رودخانه در خلال

1. Meta-elliptical copula

تبریز ۱۱/۹ درجه سانتی‌گراد و متوسط بارش سالانه آن ۳۳۰/۱ میلی‌متر می‌باشد. نوسان بارندگی سالانه تبریز از ۱۹۲/۴ در سال‌های کم بارش تا ۵۱۳/۳ میلی‌متر در سال‌های پر بارش گزارش شده است. در این مطالعه از داده‌های بارش و میانگین دمای ماهانه در خلال سال‌های ۱۳۸۷-۱۳۵۰ استفاده شد. مشخصات آماری داده‌های دما و بارش ماهانه به ترتیب در جداول ۱ و ۲ آورده شده است.

شده است و بهترین تابع مفصل بر مبنای معیارهای آماری انتخاب و تحلیل همزمان بارش و دما بر مبنای آن انجام شد.

## مواد و روش‌ها

### محدوده مطالعاتی و داده‌های مورد استفاده

در این تحقیق از داده‌های هواشناسی ایستگاه سنوپتیک تبریز که در طول جغرافیایی ۱۷° ۴۶' شرقی، عرض جغرافیایی ۵° ۳۸' شمالی و ارتفاع ۱۳۶۱ متری از سطح دریا قرار دارد، استفاده شد. میانگین دمای سالانه

جدول (۱): مشخصات آماری داده‌های دمای میانگین ماهانه در ایستگاه تبریز (۱۳۸۷-۱۳۵۰)

آماره	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
ماکزیمم	۱۵/۷	۱۹	۲۶/۲	۲۹/۳	۲۸/۸	۲۴/۱
مینیمم	۹/۱	۱۳/۵	۱۹/۷	۲۳/۹	۲۳/۴	۱۸/۹
میانگین	۱۱/۹	۱۶/۸	۲۲/۴	۲۶/۵	۲۶/۲	۲۱/۷
انحراف معیار	۱/۷	۱/۵	۱/۵	۱/۲	۱/۴	۱/۰۸
ضریب تغییرات	۰/۱۴	۰/۰۹	۰/۰۶	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۵
آماره	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند
ماکزیمم	۱۷/۷	۱۱/۴	۵/۹	۳	۴/۲	۱۰/۷
مینیمم	۱۱/۱	۱/۹	-۵/۱	-۷/۹	-۸/۴	-۶/۷
میانگین	۱۴/۷	۷/۱	۱/۱۳	-۲	۰/۲۹	۵/۳
انحراف معیار	۱/۵	۱/۹	۲/۵۸	۲/۹	۲/۹	۳/۱
ضریب تغییرات	۰/۱۰	۰/۲۶	۲/۲۷	-۱/۴	۹/۸	۰/۵۷

عدم کارایی ضریب همبستگی پیرسون در تعیین همبستگی غیرخطی بین متغیرهای مورد بررسی، استفاده از شاخص ناپارامتری کندال می‌تواند مشکلات موجود در این خصوص را برطرف نماید که این ضریب در مطالعات مربوط به استفاده از توابع مفصل کاربرد فراوانی دارد (نلسون، ۱۹۹۹). برای داده‌های مشاهداتی  $\Pi$  متغیره، شامل  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  مقدار ضریب کندال از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$\tau = \left(\frac{n}{2}\right)^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{sgn}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)], \quad (1)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \varphi > 0 \\ 0 & \text{if } \varphi = 0 \\ -1 & \text{if } \varphi < 0 \end{cases}$$

با بررسی داده‌های دما مشخص گردید که این داده‌ها در ایستگاه تبریز و در دوره آماری مورد بررسی روند فصلی از خود نشان می‌دهند و ماکزیمم و مینیمم دما به ترتیب متعلق به ماه‌های تیر و بهمن می‌باشد. همچنین بیشترین تغییرات دمایی مربوط به بهمن ماه است.

در خصوص داده‌های بارش روند فصلی مشاهده شده بر خلاف داده‌های دما چندان محسوس نمی‌باشد و این نشان از تغییرات بارش در طی دوره آماری مورد بررسی دارد. بیشترین تغییرات بارش نیز متعلق به بهمن ماه می‌باشد. در بررسی رابطه بین بارش و دما می‌توان گفت که رابطه منطقی حاکم بر آن‌ها ناشی از آن است که بارش بر روی رطوبت خاک تاثیرگذار است که آن نیز بر روی حرارت سطح خاک با کنترل شار حرارتی نهان و محسوس موثر است (هانگ و وان دن دول، ۱۹۹۳). در گام اول جهت بررسی رابطه حاکم بین بارش و دما مقدار همبستگی بین آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به

مقادیر پارامترهای ضریب همبستگی و ضریب کندال  
به ازای ماه‌های مختلف در طول دوره آماری در جدول ۳

ارائه شده است.

جدول (۲): مشخصات آماری داده‌های بارش ماهانه در ایستگاه تبریز (۱۳۸۷-۱۳۵۰)

آماره	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
ماکزیمم	۱۲۸/۴	۹۸	۶۴	۳۳/۱	۲۱/۶	۳۶/۲
مینیمم	۷/۲	۶/۶	۰	۰	۰	۰
میانگین	۴۹/۱	۴۱/۹	۱۴/۹۵	۵/۲	۲/۹	۶/۶
انحراف معیار	۲۷/۲	۲۲/۵	۱۵/۸	۷/۸	۴/۹	۹/۲
ضریب تغییرات	۰/۵۵	۰/۵۳	۱/۰۶	۱/۵	۱/۷	۱/۴
آماره	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند
ماکزیمم	۷۷/۳	۸۳/۹	۱۲۳/۴	۵۲/۹	۵۴/۸	۱۱۰/۱
مینیمم	۰	۲	۱/۲	۰	۱	۵/۸
میانگین	۲۱/۸	۲۶/۸	۲۳/۱	۲۱/۱	۲۰/۳	۳۴/۱
انحراف معیار	۲۱/۵	۱۷/۹	۲۲/۵	۱۲	۱۳/۴	۱۹
ضریب تغییرات	۱	۰/۷	۱	۰/۵۷	۰/۶۶	۰/۵۶

جدول (۳): تحلیل همبستگی دما و بارش ماهانه در ایستگاه تبریز (۱۳۸۷-۱۳۵۰)

ضریب همبستگی	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
ضریب پیرسون	-۰/۴۹	-۰/۵۰	-۰/۷۵	-۰/۲۹	-۰/۴۳	-۰/۵۳
ضریب کندال	-۰/۳۲	-۰/۳۵	-۰/۶۴	۰	-۰/۰۹	-۰/۲۷
ضریب همبستگی	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند
ضریب پیرسون	-۰/۳۷	-۰/۳۶	۰/۰۶	-۰/۱۶	۰/۰۷	-۰/۰۲
ضریب کندال	-۰/۲۷	-۰/۳۳	۰/۰۳	-۰/۱۵	۰	-۰/۱

با بررسی جدول ۳ می‌توان دید که در اغلب ماه‌های سال روند ضریب همبستگی و ضریب کندال مشابه است و با توجه به وجود چولگی و رابطه غیرخطی بین دما و بارش در ایستگاه تبریز ضریب کندال ضریب مناسب‌تری جهت بررسی میزان همبستگی بین داده‌ها می‌باشد. در اغلب ماه‌ها همبستگی بین بارش و دما در ایستگاه تبریز منفی می‌باشد و بیشترین میزان همبستگی مربوط به خرداد ماه معادل -۰/۶۴ می‌باشد.

### توابع مفصل

در این تحقیق، از توابع مفصل جهت مدل کردن همبستگی درونی بین توزیع‌های احتمالاتی بین بارش و دما در هریک از ماه‌های سال استفاده شده است. تئوری مربوط به توابع مفصل به عنوان زیربنای این علم توسط اسکالر (۱۹۵۹) ارائه شده است. چنانچه متغیرهای  $X$  و  $Y$

متغیرهای تصادفی پیوسته و به ترتیب معرف دما و بارش باشند و  $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$  و  $H_Y(y) = \Pr(Y \leq y)$  معرف توابع توزیع تجمعی آن‌ها باشند، با توجه به تئوری اسکالر تابع مفصل یکتای  $C$  مطابق رابطه زیر وجود دارد:

$$\Pr(X \leq x, Y \leq y) = C(F(x), H(y)) \quad (۳)$$

در این رابطه  $C(u, v) = \Pr(U \leq u, V \leq v)$  توزیع جفت متغیرهای  $(U, V) = (F(X), H(Y))$  می‌باشد که توزیع حاشیه‌ای آن‌ها به صورت یکنواخت در بازه  $[0, 1]$  قرار دارد. تابع مفصل  $C$  مشخص کننده همبستگی بین جفت متغیرهای  $(X, Y)$  می‌باشد. توابع مفصل مختلفی وجود دارند که پارامترهای آن‌ها کنترل کننده میزان و شدت همبستگی است (نلسون، ۱۹۹۹). در این تحقیق،

جهت مدل سازی از چندین تابع مفصل متفاوت استفاده شده که مشخصات آن ها در جدول ۴ آورده شده است.

جدول (۴): مشخصات توابع مفصل مورد استفاده در این تحقیق (سالوادوری و همکاران، ۲۰۰۷)

پارامتر تابع	رابطه ریاضی	تابع مفصل
$\theta \geq 0$	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	کلایتون
$\theta \neq 0$	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$	فرانک
$\theta \geq 1$	$e^{(-(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta}}$	گامبل

توزیع آماری شاخص انتخاب گردید. برای داده های دما نیز از توزیع مقدار حدی تعمیم یافته (GEV) استفاده شد. پس از انتخاب توزیع آماری مناسب، از روش ماکزیمم درست نمائی جهت تخمین پارامترهای توزیع ها استفاده شد. برای داده های بارش مقدار پارامتر توزیع نمایی ( $\alpha$ ) برابر  $23/06$  و برای داده های دما، مقادیر پارامترهای توزیع مقدار حدی تعمیم یافته شامل پارامتر شکل ( $k$ )، پارامتر مقیاس ( $\sigma$ ) و پارامتر موقعیت ( $\mu$ ) به ترتیب برابر  $-0/39$ ،  $2/66$  و  $0/37$  بدست آمدند. توابع توزیع تجمعی متناظر با متغیرهای بارش و دما به ترتیب در روابط (۴) و (۵) نشان داده شده است. همچنین مقایسه ای بین داده های مشاهداتی و توزیع آماری برازش داده شده برای داده های بارش و دما به ترتیب در شکل های ۱ و ۲ ارائه شده است.

$$F_R(r) = 1 - e^{-r/23.06} \quad (4)$$

$$F_T(t) = e^{\left\{ - \left[ 1 - 0.39 \left( \frac{t - 0.37}{2.66} \right)^{1/0.39} \right] \right\}} \quad (5)$$

### به کارگیری توابع مفصل

در بخش نتایج به کارگیری سه تابع مفصل شامل فرانک، کلایتون و گامبل برای داده های بارش و دمای ایستگاه تبریز در آذر ماه ارائه شده است. همچنین مقدار مفصل تجربی ناپارامتری نیز برای داده های بارش و دما محاسبه شدند و نتایج آن با مقادیر سه تابع مفصل ذکر شده مقایسه گردیدند. تابع مفصلی که نزدیک ترین نتایج را با مقادیر مفصل تجربی داشت، به عنوان تابع مفصل شاخص انتخاب شد. جهت بررسی عملکرد توابع مفصل از معیارهای آماری شامل ضریب همبستگی (R)، ریشه

### نتایج و بحث

در این مطالعه برای کلیه ماه های سال در دوره آماری ۱۳۵۰-۱۳۸۷ در ایستگاه تبریز تجزیه و تحلیل های آماری و بکارگیری توابع مفصل به صورت جداگانه انجام پذیرفت. اما به منظور رعایت اختصار، در این مقاله فقط نتایج گرافیکی و تحلیل آن ها در آذر ماه ارائه شده است. روند بکار گرفته شده برای آذر ماه مشابه سایر ماه ها می باشد. همچنین قابل ذکر است جهت بکارگیری سه تابع مفصل معرفی شده در بخش قبل برای ماه های سال لازم است تا ابتدا ضریب همبستگی بارش و دما در هر ماه مورد بررسی قرار گیرد. به ازای مقادیر منفی ضریب کندال امکان محاسبه پارامترهای توابع مفصل کلایتون و گامبل وجود ندارد و لذا در چنین شرایطی از بین توابع مفصل معرفی شده فقط تابع فرانک قابل استفاده است. با توجه به اینکه در آذر ماه مقادیر ضریب همبستگی و کندال مثبت هستند، لذا می توان از هر سه تابع مفصل معرفی شده استفاده کرد.

### توزیع آماری حاکم بر داده های مورد استفاده

قبل از به کارگیری توابع مفصل لازم است تا توزیع آماری حاکم بر داده های بارش و دما در ایستگاه تبریز مشخص گردد. در این راستا توزیع های آماری مورد استفاده در هیدرولوژی مورد بررسی قرار گرفتند و از آزمون آماری کولموگروف-اسمیرنف<sup>۱</sup> (سطح معنی داری ۵ درصد) جهت بررسی مناسب بودن توزیع های آماری استفاده شد. برای داده های بارش توزیع نمایی به عنوان

1. Kolmogorov-Smirnov test

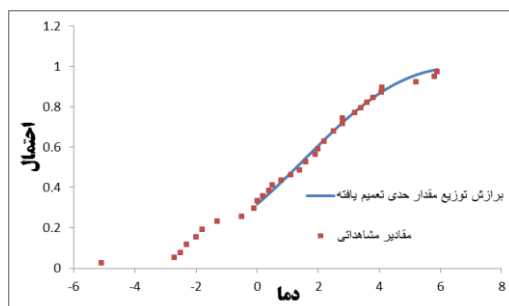
$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (C_S(i) - C_e(i))^2}{\sum_{i=1}^N (C_S(i) - \bar{C}_S)^2} \quad (۸)$$

در روابط فوق  $C_S$  مقادیر محاسباتی با استفاده تابع مفصل تئوری،  $C_e$  مقادیر متناظر با تابع مفصل تجربی،  $\bar{C}_S$  میانگین مقادیر تابع مفصل تجربی و  $N$  تعداد داده‌ها است. در جدول ۵ مقدار پارامتر تابع مفصل تئوری ( $\theta$ ) و مقادیر معیارهای آماری برای توابع مفصل مورد استفاده در آذر ماه نشان داده شده است.

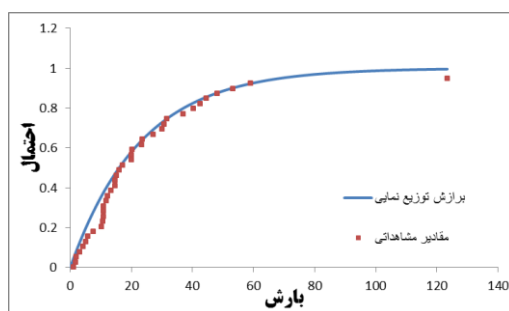
میانگین مربعات خطا (RMSE) و ضریب ناش-ساتکلیف (NSE) مطابق روابط زیر استفاده شد:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^N (C_S(i) - C_e(i))^2}{\sum_{i=1}^N (C_e(i)^2) - \frac{\sum_{i=1}^N (C_S(i)^2)}{N}}} \quad (۶)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (C_S(i) - C_e(i))^2} \quad (۷)$$



شکل (۱): برازش توزیع مقدار حدی تعمیم یافته بر داده های دمای ماهانه ایستگاه تبریز



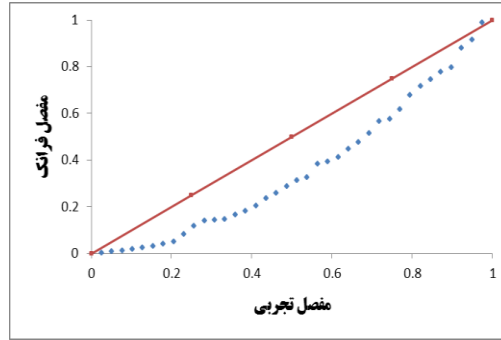
شکل (۲): برازش توزیع نمایی بر داده های بارش ماهانه ایستگاه تبریز

جدول (۵): مقادیر پارامتر و معیارهای آماری مختلف برای توابع مفصل بکار گرفته شده

NSE	RMSE	R	مقدار $\theta$	تابع مفصل
۰/۷۰۳	۰/۱۵۳	۰/۹۷۸	۰/۰۶	کلایتون
۰/۷۰۵	۰/۱۵۲	۰/۹۷۸	۰/۲۷	فرانک
۰/۷۰۵	۰/۱۵۲	۰/۹۷۸	۱/۰۳	گامبل

خصوص این است که تابع مفصل فرانک به دلیل اینکه به ازای مقادیر منفی ضریب کندال نیز قابل کاربرد است، می‌تواند در این تحقیق به عنوان تابع شاخص انتخاب گردد. در شکل ۳ نمودار پراکندگی مقادیر مفصل تجربی و مقادیر محاسباتی با استفاده از تابع فرانک نشان داده شده است و نسبت به محور ۴۵ درجه مقایسه شده است.

با توجه به جدول (۵) و در نظر گرفتن مقادیر معیارهای آماری خطای محاسبه شده می‌توان دید که عملکرد هر سه تابع مفصل تئوری در مقایسه با تابع مفصل تجربی مشابه بوده و تفاوت محسوسی بین توابع مورد استفاده دیده نمی‌شود. یکی از دلایل این مساله شاید این باشد که هر سه تابع مفصل استفاده شده به خانواده توابع ارشمیدسی متقارن تعلق دارند. اما نکته قابل توجه در این

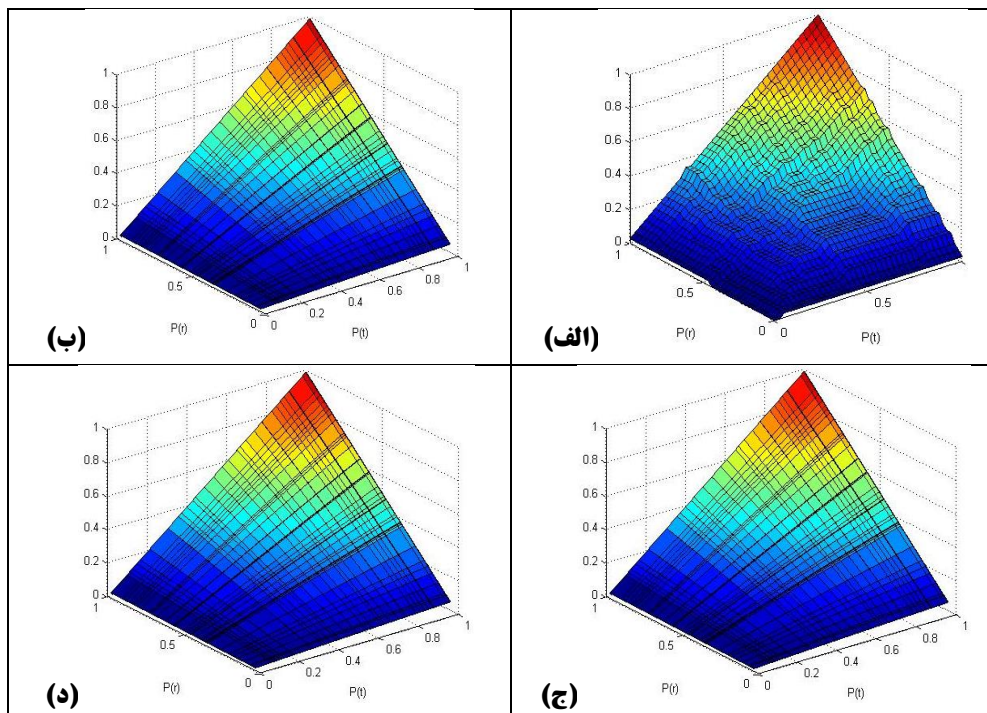


شکل (۳): نمودار پراکندگی مقادیر مفصل تجربی در برابر تابع مفصل فرانک در آذر ماه، ایستگاه تبریز

$$F_{T,R}(t,r) = -\frac{1}{0.27} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-27F_T(t)} - 1)(e^{-27F_R(r)} - 1)}{e^{-0.27} - 1} \right] \quad (9)$$

در شکل ۴ نیز توزیع دومتغیره بارش و دما برای تابع مفصل تجربی و همچنین توابع مفصل فرانک، کلایتون و گامبل در آذر ماه در ایستگاه تبریز نشان داده شده است. با توجه به شکل ۴، نیز می‌توان دید که هر سه تابع مفصل عملکرد مشابهی در پیش‌بینی توزیع دومتغیره بارش و دما در آذر ماه داشته‌اند. اما همانگونه که قبلاً ذکر شد تابع فرانک به دلیل عدم داشتن محدودیت‌های تابع کلایتون و گامبل در مطالعات تغییر اقلیم کاربردی‌تر باشد. همچنین نتایج بدست آمده در تحقیقات اسچولز و فردریچ (۲۰۰۸) مطابقت دارد.

به‌طور کلی با توجه به شکل ۳ می‌توان دید که مقادیر پیش‌بینی شده توسط تابع مفصل فرانک در مقایسه با مقادیر متناظر با تابع مفصل تجربی کمتر برآورد شده‌اند. با توجه به مقدار ضریب کندال در آذر ماه (۰/۰۳) که حاکی از عدم همبستگی بین بارش و دما در این ماه می‌باشد، به نظر می‌رسد که تابع مفصل فرانک عملکرد قابل‌قبولی در مدل‌سازی داشته است. شاید استفاده از توابع مفصل غیرارشمیدسی و نامتقارن نظیر تابع پلاکت بتواند نتایج پیش‌بینی را بهبود بخشد که این موضوع نیازمند بررسی می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع مفصل فرانک به عنوان تابع شاخص، توزیع دو متغیره بارش و دما در ایستگاه تبریز در آذر ماه به شکل رابطه زیر است:



شکل (۴): توزیع دو متغیره بارش و دما به ازای توابع مفصل (الف) تجربی (ب) کلایتون (ج) فرانک (د) گامبل



## نتیجه گیری

از جمله چالش‌های اصلی محققان در زمینه علم هیدرولوژی بررسی رفتار غیرخطی متغیرهای تصادفی و توزیع احتمالاتی چند متغیره حاکم بر آن‌ها می‌باشد. جهت فائق آمدن بر این مشکلات استفاده از توابع مفصل راهکاری مناسب و کاربردی می‌باشد. در این تحقیق به بررسی رابطه بین بارش و دما در ایستگاه تبریز در طول یک دوره آماری ۳۸ ساله پرداخته شد. در گام نخست توابع توزیع تک متغیره جهت برازش بر روی داده‌های دما و بارش مورد بررسی قرار گرفتند. با توجه به آزمون آماری کلموگراف-اسمیرنوف، توزیع آماری نمایی برای داده‌های بارش و توزیع مقدار حدی تعمیم یافته برای داده‌های دما انتخاب شدند. در گام بعدی با توجه به توزیع‌های آماری منتخب، از چندین نوع تابع مفصل از خانواده توابع ارشمیدس شامل فرانک، گامبل و کلایتون جهت برازش بر روی داده‌های بارش و دما در ماه‌های مختلف استفاده شد. همچنین مقدار تابع ناپارامتری مفصل تجربی نیز برای

داده‌ها محاسبه گردید. از چندین معیار آماری شامل ضریب همبستگی، ریشه میانگین مربعات خطا و ضریب ناش-ساتکلیف جهت بررسی عملکرد توابع مفصل تئوری در مقایسه با تابع مفصل تجربی استفاده شد. نتایج بدست آمده حاکی از آن بود که هر سه تابع مفصل عملکرد مشابهی در پیش‌بینی توزیع دومتغیره حاکم بر متغیرهای بارش و دما دارند. با این وجود با توجه وجود رابطه همبستگی منفی بین متغیرهای دما و بارش در ایستگاه تبریز و عدم کارایی توابع کلایتون و گامبل در چنین شرایطی، تابع فرانک به عنوان تابع شاخص انتخاب شد. برای تابع فرانک در آذر ماه در ایستگاه تبریز مقادیر ضریب همبستگی پیرسون و ریشه میانگین مربعات خطا به ترتیب برابر ۰/۹۷۸ و ۰/۱۵۲ به دست آمدند. لازم به ذکر است بررسی عملکرد سایر انواع توابع مفصل نظیر توابع غیرارشمیدسی و توابع بیضوی جهت بررسی رابطه بین بارش و دما می‌تواند موضوع تحقیقات آتی باشد.

## منابع

1. Eckmann, J.P. and D. Ruelle. 1985. Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Reviews of modern physics*, 57(3), 617.
2. Tanarhte, M., P. Hadjinicolaou and J. Lelieveld. 2012. Intercomparison of temperature and precipitation data sets based on observations in the Mediterranean and the Middle East, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 117.
3. Rajeevan, M., D.S. Pai and V. Thapliyal. 1998. Spatial and temporal relationships between global land surface air temperature anomalies and Indian summer monsoon rainfall, *Meteorology and Atmospheric Physics*, 66(3-4), 157-171.
4. Huang, Y., J. Cai, H. Yin and M. Cai. 2009. Correlation of precipitation to temperature variation in the Huanghe River (Yellow River) basin during 1957–2006, *Journal of hydrology*, 372(1), 1-8.
5. Aldrian, E. and R. DwiSusanto. 2003. Identification of three dominant rainfall regions within Indonesia and their relationship to sea surface temperature, *International Journal of Climatology*, 23(12), 1435-1452.
6. Wilks, D.S. 2011. *Statistical methods in the atmospheric sciences*, Access Online via Elsevier, Vol. 100.
7. AghaKouchak, A., A. Bárdossy and E. Habib. 2010. Conditional simulation of remotely sensed rainfall data using a non-Gaussian v-transformed copula, *Advances in Water Resources*, 33(6), 624-634.
8. De Michele, C. and G. Salvadori. 2003. A Generalized Pareto intensity-duration model of storm rainfall exploiting 2-copulas, *Journal of Geophysical Research*, 108(D2): 4067.
9. Salvadori, G. and C. De Michele. 2006. Statistical characterization of temporal structure of storms, *Advances in Water Resources*, 29(6): 827–842.
10. Grimaldi, S. and F. Serinaldi. 2006. Design hyetographs analysis with 3-copula function, *Hydrological Sciences Journal*, 51(2): 223–238.
11. Zhang, L. and V.P. Singh. 2007a. Bivariate rainfall frequency distributions using Archimedean copulas, *Journal of Hydrology*, 332: 93-109.
12. Zhang, L. and V.P. Singh. 2007b. Gumbel-Hougaard copula for trivariate rainfall frequency analysis, *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4): 409-419.
13. Serinaldi, F. 2008. Analysis of inter-gauge dependence by Kendall's  $\tau_K$ , upper tail dependence coefficient, and 2-copulas with application to rainfall fields, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 22(6), 671-688.
14. Favre, A.C., S. El Adlouni, L. Perreault, N. Thiémonge and B. Bobee. 2004. Multivariate hydrological frequency analysis using copulas, *Water Resources Research*, 40:W01101, doi:10.1029/2003WR002456.

15. De Michele, C., G. Salvadori, M. Canossi, A. Petaccia and R. Rosso. 2005. Bivariate statistical approach to check adequacy of dam spillway, *Journal of Hydrologic Engineering*, 10(1): 50–57.
16. Shiau, J.T. 2006. Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas, *Water Resources Management*, 20: 795–815.
17. Shiau, J.T., S. Feng and S. Nadarajah. 2007. Assessment of hydrological droughts for the Yellow River, China, using copulas, *Hydrological Processes*, 21(16): 2157-2163.
18. Song, S. and V.P. Singh. 2010. Meta-elliptical copulas for drought frequency analysis of periodic hydrologic data, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 24: 425-444.
19. Laux, P., S. Vogl, W. Qiu, H.R. Knoche and H. Kunstmann. 2011. Copula-based statistical refinement of precipitation in RCM simulations over complex terrain, *Hydrology and Earth System Sciences*, 15(7), 2401-2419.
20. Mirabbasi, R., A. Fakhri-Fard and Y. Dinpashoh. 2012. Bivariate drought frequency analysis using the copula method, *Theoretical and Applied Climatology*, 108(1-2), 191-206.
21. Schoelzel, C. and P. Friederichs. 2008. Multivariate non-normally distributed random variables in climate research—introduction to the copula approach, *Nonlin. Processes Geophys.*, 15(5), 761-772.
22. Huang, J. and H.M. Van Den Dool. 1993. Monthly precipitation-temperature relations and temperature prediction over the United States, *Journal of Climate*, 6(2), 1111–1132
23. Nelsen, R.B. 1999. *An introduction to copulas*, Springer.
24. Sklar, A. 1959. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *PublInst Statist Univ Paris* 8:229–231.
25. Salvadori, G., C. De Michele, N.T. Kottegoda and R. Rosso. 2007. *Extremes in nature. An approach using copulas*, Springer, Dordrecht.

## Modeling of Temperature and Rainfall of Tabriz Using Copulas

H. Sanikhani<sup>1\*</sup>, R. Mirabbasi Najaf Abadi<sup>2</sup>, Y. Dinpashoh<sup>3</sup>

### Abstract

Because of nonlinear dependence between the random variables, probability distributions of multivariate random variables are generally more complex compared to their univariate counterparts. One approach to solve this problem is the use of copulas, which have more considered by researchers over recent years. In this study, the dependence of rainfall and temperature in Tabriz station was modeled using copulas. In this regard, monthly data of rainfall and temperature of Tabriz for a period of 1971-2008 was used. At the first step, by application of Kolmogorov–Smirnov test, exponential and generalized extreme value (GEV) distributions are selected as appropriate univariate distributions for rainfall and temperature, respectively. Then three type of copulas functions namely, Clayton, Gumbel and Frank are used for creating bivariate distribution of rainfall and temperature in Tabriz. The results indicated that the performances of all types of copulas are close together. However, an only Frank copula has capability to modeling the negative dependence between variables. Therefore, Frank function is selected as appropriate copulas for modeling dependence between rainfall and temperature in Tabriz station.

**Keywords:** Rainfall, Tabriz, Bivariate analysis, Temperature, Copulas.

---

<sup>1</sup> PhD. Student, Water Resources Eng., Young researchers and Elite Club, Saveh Branch, Islamic Azad University, Saveh, Iran

<sup>2</sup> Assistant Professor, Water Eng. Dep., Agriculture Faculty, Shahrekord University

<sup>3</sup> Associate Professor, Water Eng. Dep., Agriculture Faculty, University of Tabriz

\*Email: (hsanikhani12@gmail.com) Corresponding Author