

Research Paper

Numerical Modeling of Flow and Bed Load Transport Using Roe Method

Abdolreza. Tavakoli ¹,Mahnaz. Ghaeini-Hessaroeeyeh ^{2*},Ehsan. Fadaei-Kermani ³

¹ M.Sc. Graduate, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

² Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran (<https://orcid.org/0000-0003-1418-1538>)

³ Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran



10.22125/IWE.2023.168169

Received:
March 16, 2022
Accepted:
July 31, 2022
Available online:
April 18, 2023

Keywords:

Finite volume method, sediment transport, Exner equation, Grass model, Roe model

Abstract

In the present study, the two-dimensional finite volume model of flow and bed load transport has been developed. The governing equations consist of shallow water equations and Exner equation. The Exner equation is based on the depth-averaged shallow water equations and bed load transport flow-sediment interaction parameter that acts as a calibration factor. In addition, The Grass model is employed to calculate sediment discharge. The governing equations are solved using a fully coupled method. The Roe method is selected to compute the intercell fluxes on quadrilateral networks. The Roe approximate Riemann solver is a first-order scheme. Finally, the performance of the present model is evaluated. The results of the present model are compared with the exact solutions, and other available numerical results in one-dimensional and two-dimensional tests. Results show that the present model is appropriate, and capable of modeling the mobile beds.

1. Introduction

Investigation of flow characteristics in rivers and sea coasts is one of the most important issues of civil engineering, which plays a remarkable role in design of related hydraulic structures, as well as management plans. In recent years, mathematical models have been improved as a suitable option for modeling multiphase flows.

Numerical simulation of free surface flows and also load transport on erodible bed deals with transient flow and movable flow boundaries (Serrano-Pacheco et al., 2012). The simulations of bed load transport flows can be considered as coupled (Frey et al., 2017 and Wengrove et al., 2019) or uncoupled (Biswal et al., 2018) conditions.

* **Corresponding Author:** M. Ghaeini-Hessaroeeyeh

Address: Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran
Email: mghaeini@uk.ac.ir
Tel: 034-31322551

2. Materials and Methods

In this paper, the two-dimensional finite volume model of flow and bed load transport has been developed. The two-dimensional governing shallow water equations can be presented as flows (Toro, 2001):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = S \tag{1}$$

where

$$U = (h, q_x, q_y)^T \tag{2}$$

In the situation of coupled method, the parameters in equation 1 can be represented as:

$$F = (q_x, \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \frac{q_x q_y}{h}, \xi \frac{q_x(q_x^2 + q_y^2)}{h^3})^T \tag{3}$$

$$G = (q_y, \frac{q_x q_y}{h}, \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \xi \frac{q_y(q_x^2 + q_y^2)}{h^3})^T \tag{4}$$

Where h is depth of water, and qy = hv and qx = hu are specific discharges and u and v are depth-averaged components of the velocity vector along x and y coordinates. The source term S is divided into two terms (Serrano-Pacheco et al., 2012):

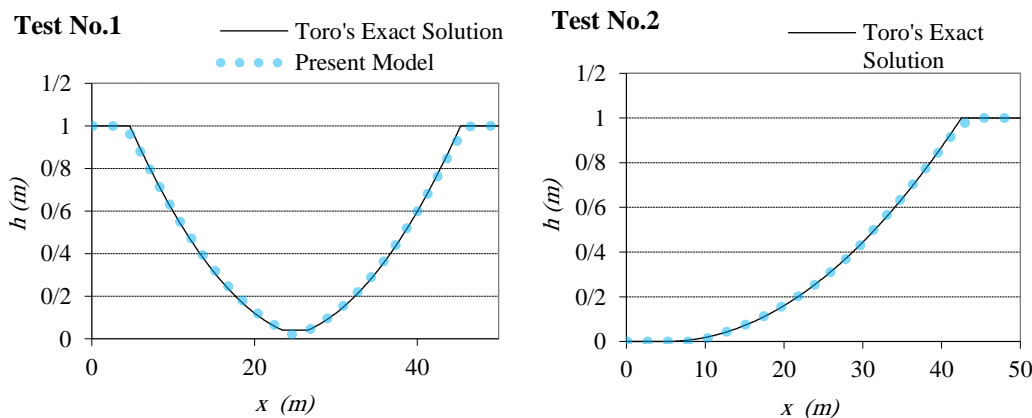
$$S_b = (0, -gh \frac{\partial z}{\partial x}, -gh \frac{\partial z}{\partial y}, 0)^T \tag{5}$$

$$S_s = (0, -\frac{\partial \tau_{b,x}}{\rho_w}, -\frac{\partial \tau_{b,y}}{\rho_w})^T \tag{6}$$

The Exner equation is presented based on the depth averaged shallow water equations and bed load transport flow sediment interaction parameter that acts as a calibration factor. In addition, The Grass model is employed to calculate sediment discharge.

3. Discussion and Conclusion

Discussion The first set of numerical model results involves 1-D dam break simulation. In this case, three different tests have been considered. Fig. 1 shows the present model results compared with exact solution of Toro (2001).



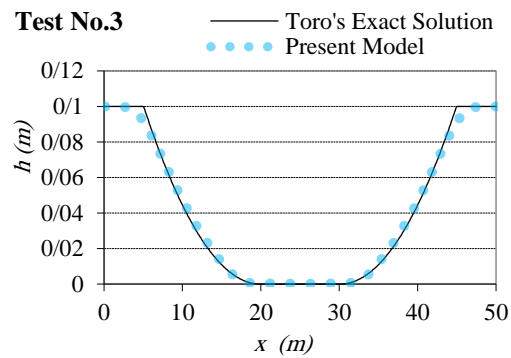


Fig. 1: The comparison of the present model results with Toro (2001) for water free surface profile

In case of 2-D dam break simulation, the Circular dam break problem is considered. Fig. 2 shows the initial situation of the numerical simulation, and in Fig. 3 the results are represented after 3.5 s.

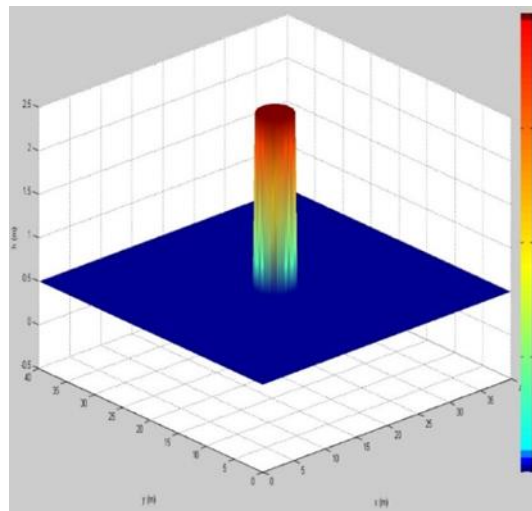


Fig. 2: The circular dam break water surface profile at $t=0$ s.

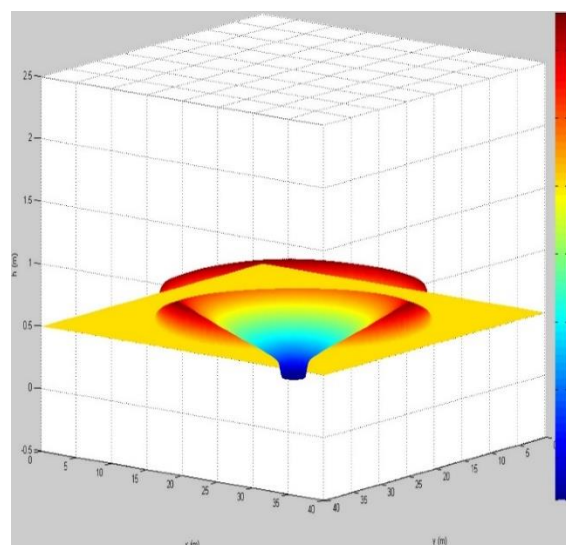


Fig. 3: The present model results of dam break for water surface profile at $t=3.5$ s.

The final tests investigate 1-D and 2-D simulation of flow over mobile beds. These tests include the Riemann problem for mobile beds equations. The present model results have been evaluated according to the results of exact solution and Hudson model (2001). Fig. 4 shows the present model results for mobile bed level at $t=30$ s. Moreover; the accuracy of the present model results compared with exact solution for water surface level and bed level is presented on table 1.

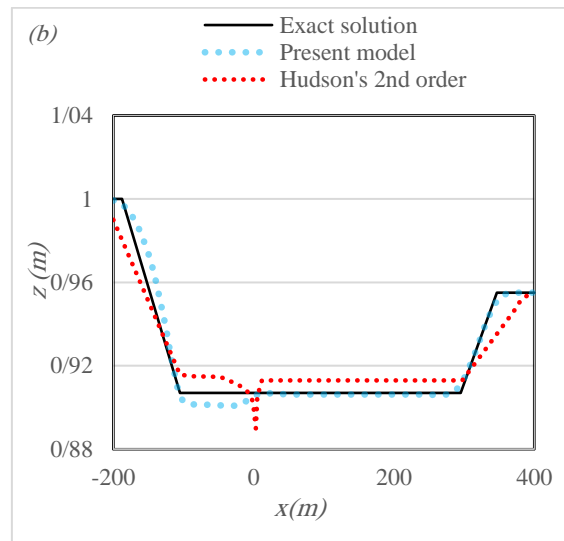


Fig. 4: Comparison of the present model results with Hudson 2nd order and exact solution for bed level at $t=30$ s.

Table. 1: Comparison of the present model results with exact solution for water surface and bed level.

	Maximum relative error for present model (%)	Maximum relative error for Hudson model (%)
Water surface	0.51	4.54
Bed level	1.65	4.26

According to the results, it can be seen that the present model is appropriate and efficient, and also capable of modeling the mobile beds.

4. Six important references

- 1) Biswal, S.K., Moharana, M.K. and Agrawal, A.K., 2018. Effects of initial stage of dam-break flows on sediment transport. *Sādhanā*, 43(12), p.203.
- 2) Hudson, J., 2001. Numerical techniques for morphodynamic modelling (Doctoral dissertation, University of Reading).
- 3) Frey, P., Maurin, R., Morchid-Alaoui, L., Gupta, S. and Chauchat, J., 2017. Investigation of vertical size segregation in bedload sediment transport with a coupled fluid-discrete element model. In *EPJ Web of Conferences* (Vol. 140, p. 09025). EDP Sciences.
- 4) Serrano-Pacheco, A., Murillo, J. and Garcia-Navarro, P., 2012. Finite volumes for 2D shallow-water flow with bed-load transport on unstructured grids. *Journal of Hydraulic Research*, 50(2), pp.154-163.
- 5) Toro, E.F. and Toro, E., 2001. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows (Vol. 868). New York: Wiley.

- 6) Wengrove, M.E., Foster, D.L., Lippmann, T.C., de Schipper, M.A. and Calantoni, J., 2019. Observations of Bedform Migration and Bedload Sediment Transport in Combined Wave-Current Flows. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 124(7), pp.4572-4590.

Conflict of Interest

Authors declared no conflict of interest.

مدل سازی عددی جریان و انتقال بار بستر با استفاده از روش Roe

عبدالرضا توکلی^۱، مهناز قائینی حصاروئیه^{۲*}، احسان فدائی کرمانی^۳

تاریخ ارسال: ۱۴۰۰/۱۲/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۰۹

مقاله پژوهشی

چکیده

در تحقیق حاضر مدل دوبعدی حجم محدود جریان و انتقال بار بستر توسعه یافته است. معادلات حاکم شامل معادلات جریان آب‌های کم عمق و معادله Exner در نظر گرفته شده است که در آن انتقال بار بستر با فرض سرعت متوسط جریان بدست می‌آید و پارامتر اندرکنش جریان-رسوب که به صورت یک ضریب کالیبراسیون عمل می‌کند، محاسبه می‌شود. جهت محاسبه دبی بار بستر از مدل Grass استفاده شده است. همچنین روش Roe به منظور مدل‌سازی فلاکس‌های عبوری جریان و رسوب انتقالی از وجوه حجم کنترل مورد استفاده قرار گرفته است. معادلات حاکم بر جریان و انتقال بار بستر به صورت همزمان حل شده است. صحت و کارایی مدل حاضر با مثال‌های مختلف یک‌بعدی و دوبعدی جریان و انتقال رسوب مورد بررسی قرار گرفت. در نهایت نتایج به دست آمده از مدل عددی حاضر با حل دقیق و حل عددی محققین دیگر مورد مقایسه و ارزیابی قرار گرفت. مقایسه نتایج به دست آمده از مدل عددی حاضر برای ارتفاع سطح آزاد جریان با نتایج حل دقیق با حداکثر خطای نسبی 0.51 درصد و ارتفاع بستر متحرک جریان با حداکثر خطای نسبی 1.65 درصد، نشان دهنده دقت و کارایی مدل ارائه شده در مدل‌سازی جریان بر بسترهای متحرک می‌باشد.

واژه های کلیدی: روش حجم محدود، انتقال رسوب، معادله Exner، مدل Grass، روش Roe

^۱ کارشناسی ارشد مهندسی عمران- سازه های هیدرولیکی، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران (Email: a.reza_tavakoli@yahoo.com)

^۲ دانشیار بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران (Email: mghaeini@uk.ac.ir) (نویسنده مسئول)

^۳ استادیار بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران (Email: e.fadaei@uk.ac.ir)

مقدمه

شناخت و مطالعه مشخصات جریان در رودخانه‌ها و سواحل دریاها یکی از موضوعات مهم مهندسی عمران است که در طراحی انواع مختلف سازه‌های مرتبط با آنها و همچنین طرح‌های ساماندهی کاربرد اساسی دارد. هزینه‌های بالای ساخت مدل فیزیکی برای مطالعه این جریان‌ها و پیشرفت‌های قابل توجه در ساخت کامپیوترها باعث شده تا مدل‌های ریاضی به عنوان ابزاری انعطاف‌پذیر و اقتصادی در این زمینه، توجه محققان و متخصصان امر را به خود جلب کند. در طبیعت بیشتر جریان‌های دریاها و رودخانه‌ها روی بسترهای متحرک و قابل انتقال صورت می‌گیرد (Toro, 2001). شناخت اثرات جریان بر انتقال بار بستر همواره حائز اهمیت می‌باشد. هدف این تحقیق یافتن راه حل عددی مناسب برای شبیه‌سازی جریان بر بستر متحرک است به طوریکه نتایج مدل دارای کمترین نوسانات و خطا نسبت به راه حل دقیق باشد تا بتوان آن را به مدل واقعی تعمیم داد. مدل‌سازی عددی جریان‌های آزاد همراه با حرکت بار بستر بر روی بستر فرسایش‌پذیر در واقعیت مانند جریان گذرا و مرزهای در حال حرکت جریان می‌باشد (Serrano-Pacheco et al., 2012). در مطالعات و تحقیقات صورت پذیرفته، از جمله تحقیقات Van Rijn و همکاران (2007)، Frey و همکاران (2017) و Wengrove و همکاران (2019)، برای مدل‌سازی عددی جریان‌های آزاد همراه با حرکت بار بستر، روند همزمان^۱ فرمول بندی توسعه داده شده است. در گروه دیگر تحقیقات که از روند غیر همزمان^۲ استفاده شده است از جمله Biswal و همکاران (2018)، ابتدا در زمینه جریان آزاد محاسبات انجام می‌گیرد و بعد از آن حرکت بار بستر بررسی می‌شود. باید در نظر داشت که در روش غیر همزمان به دلیل کوتاه بودن زمان محاسبات و

راحت تر بودن پیاده‌سازی مدل عددی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در تحقیق دیگری توسط Hudson و Sweby (2005) دقت پنج فرمول بندی و راه حل عددی را که رسوب بار بستر را برای جریان گذرا به صورت همزمان مدل می‌کنند، مورد بررسی قرار داد. در روش همزمان به یک ماتریس ژاکوبین برای کل سیستم جریان آزاد و بار بستر در نظر گرفته می‌شود. در تحقیق ایشان برای بدست آوردن شار رسوب انتقالی از مدل گرس^۳ (Grass, 1981) به علت سادگی این مدل مورد استفاده قرار گرفت.

Fent و همکاران (2018) در تحقیق خود به مقایسه کارایی روش‌های مختلف مورد استفاده در شبیه‌سازی جریان شکست سد بر روی بستر متحرک پرداختند. در مطالعه انجام شده توسط آنها بستر با مصالح مختلف مورد بررسی قرار گرفت. Mahdizadeh و Sharifi (2019) با استفاده از الگوریتم اصلاح شده انتشار موج مرتبه دوم، به مدل‌سازی عددی انتقال رسوب در بستر متحرک پرداختند. مقایسه نتایج بدست آمده از مدل عددی با نتایج آزمایشگاهی نشان دهنده دقت قابل قبول روش ارائه شده بود.

در تحقیق حاضر، ابتدا معادلات دیفرانسیل هیدرودینامیک برای جریان سطح آزاد و مورفودینامیک برای انتقال بار بستر ارائه می‌شود که می‌توان آنها را به صورت همزمان یا غیر همزمان در نظر گرفت. سپس یک فرایند آپویند^۴ مرتبه اول حجم محدود برای گسسته‌سازی معادلات بر روی یک شبکه بندی منظم مستطیلی پیشنهاد شده است. در نهایت روش حل همزمان معادلات جریان و انتقال رسوب و جزئیات مورد نیاز برای اعمال روش حجم محدود و همچنین ماتریس ژاکوبین که قسمت کلیدی این تحقیق می‌باشد بیان شده است. شایان ذکر است که تمرکز این تحقیق بر حل همزمان متغیرهای جریان سطح آزاد آب و

¹ Coupled

² Uncoupled

³ Grass

⁴ Upwind



آنها را با استفاده از رابطه مانینگ مدل کرد (Serrano-Pacheco et al., 2012).

مدل مورفودینامیکی

دینامیک رسوب بر اساس فرمول پیوستگی رسوب بیان می‌شود. پیوستگی رسوب به صورت تغییرات لایه رسوب در یک حجم کنترل به علت تغییرات خالص ذرات رسوب از مرزهای حجم کنترل تعریف می‌گردد که می‌توان آن را به صورت معادله اکسندر^۱ بیان نمود. با صرف نظر کردن از جنس رسوب ورودی و خروجی و بار معلق رسوب حجم کنترل، معادله اکسندر به صورت رابطه (۵) نوشته می‌شود (Van Rijn, 1993):

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \xi \frac{\partial q_{s,x}}{\partial x} + \xi \frac{\partial q_{s,y}}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

که $\xi = \frac{1}{1-p}$ است و p تخلخل رسوب بستر می‌باشد. $q_{s,x}$ و $q_{s,y}$ به ترتیب دبی واحد عرض بار بستر در جهت x و y می‌باشند که هر دو تابع عمق آب (h) و مولفه های سرعت متوسط u و v می‌باشند (Serrano-Pacheco et al., 2012). فرمولاسیون دبی بار بستر می‌تواند بر اساس قوانین قطعی باشد و یا اینکه به صورت روش‌های احتمالی که همیشه با آزمایش بدست می‌آیند بیان گردد. در سال ۱۹۸۱ گرس رابطه ای برای انتقال رسوب در حالت دوبعدی ارائه کرد که به صورت رابطه (۶) ارائه شده است (Grass, 1981).

$$q_{s,x} = A_g u (u^2 + v^2) \quad (6)$$

$$q_{s,y} = A_g v (u^2 + v^2)$$

که A_g ضریب ثابت کالیبراسیون است و تاثیرات ابعاد دانه‌بندی و لزجت سینماتیکی را اعمال می‌کند. رابطه (۶) برای مدل سازی رسوب دانه‌ای غیرچسبنده مناسب می‌باشد (Serrano-Pacheco et al., 2012).

مواد و روش‌ها

روش حجم محدود

روش حجم محدود از انتگرال گیری معادلات حاکم روی حجم یا شبکه سلولی Ω_i بدست می‌آید. چنانچه قانون بقا

ارتفاع بستر متحرک در یک گام زمانی می‌باشد. برای استفاده از تکنیک آپویند ماتریس تقریبی ژاکوبین تعمیم یافته تعریف می‌شود و مقادیر ویژه و بردار های ویژه متناظر برای حالت کلی معرفی می‌گردد. حل هم‌زمان متغیرهای جریان سطح آزاد آب و ارتفاع بستر متحرک در یک گام زمانی دارای دقت بالاتری نسبت به حل غیر هم‌زمان می‌باشد هرچند که ممکن است پیچیدگی ها و محاسبات بیش‌تری نسبت به حل غیر هم‌زمان داشته باشد.

معادلات حاکم

مدل هیدرودینامیکی

معادلات آب‌های کم عمق به صورت معادلات بقایی جرم و مومنوم در صفحه بیان می‌گردند که با متوسط گیری از معادلات ناویر استوکس در راستای عمق بدست می‌آیند. با نادیده گرفتن انتشار مومنوم به علت لزجت و آشفتگی، اثرات باد و عبارت کوریولیس، معادلات مدل هیدرودینامیک به صورت رابطه (۱) بیان می‌گردند (Toro, 2001):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = S \quad (1)$$

که در رابطه فوق:

$$U = (h, q_x, q_y)^T \quad (2)$$

می‌باشد و h عمق آب، $q_x = hu$ و $q_y = hv$ به ترتیب دبی واحد عرض با سرعت متوسط u و v در راستای x و y هستند. F و G بردار شار می‌باشد که به صورت رابطه (۳) بیان می‌گردند:

$$F = (q_x, \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \frac{q_x q_y}{h})^T \quad (3)$$

$$G = (q_y, \frac{q_x q_y}{h}, \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2)^T$$

که g شتاب جاذبه بوده و عبارت منبع به صورت رابطه

(۴) تعریف می‌گردد:

$$S = (0, -gh \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{b,x}}{\rho_w}, -gh \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{b,y}}{\rho_w})^T \quad (4)$$

که ρ_w چگالی آب و z ارتفاع بستر می‌باشد. عبارت های $\tau_{b,y}$ و $\tau_{b,x}$ بیانگر تنش برشی بستر می‌باشند که می‌توان

¹Exner

$$S_b = (0, -gh \frac{\partial z}{\partial x}, -gh \frac{\partial z}{\partial y}, 0)^T \quad (13)$$

$$S_s = (0, -\frac{\partial \tau_{b,x}}{\rho_w}, -\frac{\partial \tau_{b,y}}{\rho_w})^T$$

بایستی توجه داشت که F و G در رابطه (۱۲) به مولفه z بستگی نداشته و این موضوع می‌تواند برای روشی که دارای ژاکوبین است، مشکل ساز باشد (Jelti et al., 2018). شکل دیفرانسیلی عبارت منبع به صورت رابطه (۱۴) قابل ارائه می‌باشد (Hudson and Sweby, 2005):

$$gh \frac{\partial z}{\partial x} = g \frac{\partial(hz)}{\partial x} - gz \frac{\partial h}{\partial x} \quad (14)$$

$$gh \frac{\partial z}{\partial y} = g \frac{\partial(hz)}{\partial y} - gz \frac{\partial h}{\partial y}$$

در صورتی که معادلات مومنتوم بازنویسی شوند، به صورت رابطه (۱۵) بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{gh^2}{2} + hu^2 + ghz) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = gz \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_{b,x}}{\rho_w}$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{gh^2}{2} + hv^2 + ghz) = gz \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\tau_{b,y}}{\rho_w} \quad (15)$$

ماتریس ژاکوبین شار عمود بر سطح در جهت n ، $En = Fn_x + Gn_y$ می‌باشد و ماتریس ژاکوبین به صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌گردد (Serrano-Pacheco et al., 2012):

$$J^n = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ (gh + gz - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y & ghm_x \\ (gh + gz - u^2)n_x - uvn_y & vn_x & 2n_y + un_x & ghm_y \\ A & B & C & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

که

$$A = \xi \frac{\partial(q_s \cdot n)}{\partial h}$$

$$B = \xi \frac{\partial(q_s \cdot n)}{\partial q_x} \quad (17)$$

$$C = \xi \frac{\partial(q_s \cdot n)}{\partial q_y}$$

بارزترین عیب ماتریس فوق این است که به صورت صریح به مختصات عمودی وابستگی دارد. برای رفع این عیب رابطه

به صورت رابطه زیر در نظر گرفته شود (Serrano-Pacheco et al., 2012):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot E = S \quad (7)$$

در حجم‌های با اندازه ثابت به صورت رابطه (۸) می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} U d\Omega + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot E = \int_{\Omega_i} S d\Omega \quad (8)$$

با به کارگیری تئوری گوس رابطه (۹) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} U d\Omega + \sum_{k=1}^{NE} (\delta E)_k n_k l_k = \int_{\Omega_i} S d\Omega \quad (9)$$

که $n = (n_x, n_y)$ بردار یکه نرمال حجم، NE تعداد وجه‌های سلول و $\delta E = E_j - E_i$ شار مکانی وجه‌های سلول در طول لبه k می‌باشد که بین سلول i و j قرار دارد. تفاضل شار در لبه سلول به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شود (Murillo et al., 2008):

$$\delta E_k n_k l_k = J_n (U_j - U_i) \quad (10)$$

که J ماتریس ژاکوبین می‌باشد که بایستی با مفهوم آپویند بیان گردد. شکل ماتریس ژاکوبین با توجه به فیزیک مسئله تغییر می‌یابد. حال با استفاده از روش همزمان، مسئله برای متغیرهای (h, hu, hv, z) به صورت همزمان باید حل شود. این روش برای مسائل دائمی و غیردائمی قابل استفاده می‌باشد (Serrano-Pacheco et al., 2012).

راه حل همزمان

روابط (۱) و (۵) در روش همزمان برای متغیرهای $U = (h, q_x, q_y, z)^T$ به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود (Serrano-Pacheco et al., 2012):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = s \quad (11)$$

که:

$$F = (q_x, \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \frac{q_x q_y}{h}, \xi \frac{q_x(q_x^2 + q_y^2)}{h^3})^T \quad (12)$$

$$G = (q_y, \frac{q_x q_y}{h}, \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \xi \frac{q_y(q_x^2 + q_y^2)}{h^3})^T$$

و بردار عبارت منبع S به دو مولفه تقسیم می‌گردد که در رابطه (۱۳) نشان داده می‌شود:

برای آسان‌تر نمودن مسئله از حل‌کننده تقریبی ریمان استفاده می‌شود. روش ون لیر توسط Vázquez-Cendón (1999) بر روی معادلات آب‌های کم عمق اعمال شد که در این روش برای ارزیابی مقادیر متوسط حسابی U_i و U_j از ماتریس ژاکوبین استفاده شده است.

حال با استفاده از ژاکوبین رابطه (۲۳) اساس گسسته‌سازی عددی روش آپویند شکل می‌گیرد. در این روش چهار مقدار ویژه $(\tilde{\lambda}_k^m)$ و چهار بردار ویژه (\tilde{e}_k^m) حاصل می‌شود. سپس تغییرات U در طول لبه سلول بر اساس بردارهای ویژه بدست می‌آید و در نتیجه رابطه (۱۰) به رابطه (۲۵) تغییر می‌یابد (Serrano-Pacheco et al., 2012):

$$\delta U = \sum_{m=1}^4 \alpha_k^m \tilde{e}_k^m \rightarrow (\delta E.n - T_{b,n})_k = \sum_{m=1}^4 \tilde{\lambda}_k^m \alpha_k^m \tilde{e}_k^m \quad (25)$$

مقادیر ویژه ماتریس J_n ریشه‌های چند جمله‌ای زیر می‌باشند:

$$(\tilde{\lambda} - \tilde{u}.n)(\tilde{\lambda}^3 + a_1 \tilde{\lambda}^2 + a_2 \tilde{\lambda} + a_3) = 0 \quad (26)$$

که ضرایب a_1 ، a_2 و a_3 به صورت:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\tilde{u}.n \\ a_2 &= -g \tilde{h} (\tilde{B} n_x + \tilde{C} n_y) - \tilde{c} + (\tilde{u}.n)^2 \\ a_3 &= -g \tilde{h} (\tilde{A} + (\tilde{u} n_y - \tilde{v} n_x) (\tilde{B} n_y - \tilde{C} n_x)) \end{aligned} \quad (27)$$

می‌باشند. یکی از مقادیر ویژه سرعت نرمال است، یعنی $\tilde{\lambda}^1 = \tilde{u}.n = \tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y$ اگر $Q = (3a_2 - a_1^2)/9$ و $R = (9a_1 a_2 - 27a_3 - 2a_1^3)/54$ باشد، سایر مقادیر ویژه حقیقی هستند و اگر $Q^3 + R^2 < 0$ باشد سایر مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می‌آیند (Serrano-Pacheco et al., 2012):

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^2 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a_1}{3} \\ \tilde{\lambda}^3 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3} \\ \tilde{\lambda}^4 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3} \end{aligned} \quad (28)$$

که $\theta = \arccos(R/(-Q)^{3/2})$ است. بردارهای ویژه به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند:

(۱۸) پیشنهاد داده می‌شود (Serrano-Pacheco et al., 2012):

$$\delta E.n - S_b = J_n \delta U \quad (18)$$

که:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ (gh - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y & ghn_x \\ (gh - v^2)n_x - uvn_y & vn_x & 2vn_y + un_x & ghn_y \\ A & B & C & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

این ژاکوبین به صورت صریح به مختصات عمودی بستگی نداشته و از آن می‌توان برای اساس گسسته‌سازی عددی آپویند استفاده نمود. وقتی که این تعاریف برای روش همزمان اعمال شود رابطه (۹) به شکل رابطه (۲۰) نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Ud\Omega + \sum_{k=1}^{NE} (\delta E)_k n_k l_k - \sum_{k=1}^{NE} (T_{b,n})_k l_k = \int_{\Omega} S_s d\Omega \quad (20)$$

در رابطه (۲۰) فقط انتگرال عبارت منبع اصطکاک به سمت راست رابطه انتقال یافته است. گسسته‌سازی مقدار منبع شیب در لبه سلول به صورت رابطه (۲۱) می‌باشد (Murillo et al., 2008):

$$(T_{b,n})_k = (0, -g \tilde{h} \delta z n_x - g \tilde{h} \delta z n_y)_k \quad (21)$$

که

$$\tilde{h}_k = \frac{h_i + h_j}{2} \quad (22)$$

در روش Roe (1986) برای بدست آوردن راه حل، از ماتریس ژاکوبین تقریبی J_n استفاده می‌شود که در رابطه (۲۳) نمایش داده شده است:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ (g \tilde{h} - u^2)n_x - uvn_y & 2\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y & \tilde{u}n_y & g \tilde{h}n_x \\ (g \tilde{h} - v^2)n_x - uvn_y & \tilde{v}n_x & 2\tilde{v}n_y + \tilde{u}n_x & g \tilde{h}n_y \\ \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

که \tilde{u}_k ، \tilde{v}_k و \tilde{c}_k مقادیر متوسط Roe هستند و:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= -\frac{3A_g \xi}{h} (u^2 + v^2) \tilde{u}.n \\ \tilde{B} &= \frac{A_g \xi}{h} [(3u^2 + v^2) n_y + 2uv n_x] \\ \tilde{C} &= \frac{A_g \xi}{h} [(u^2 + 3v^2) n_y + 2uv n_x] \end{aligned} \quad (24)$$

زیر نویس‌های 0 و $n+1$ ، به ترتیب اشاره به سلول‌های فرضی ابتدا و انتهای ناحیه محاسباتی دارند. این سلول‌ها خارج از محدوده محاسباتی هستند و 1 و n سلول‌های مرزی ناحیه محاسباتی می‌باشند (Toro, 2001).

شرط پایداری

پایداری یک الگوی عددی با مطالعه رشد یا استهلاک خطاها در ضمن پیشرفت حل بررسی می‌شود. با صرف نظر کردن از عبارتهای غیر خطی و یا خطی کردن آنها، پایداری مورد بررسی قرار می‌گیرد. در روش صریح شرط پایداری با کنترل محدوده عدد کورانت تعیین می‌گردد. حدود عدد کورانت را می‌توان از روابط زیر بدست آورد:

$$\Delta t \leq CFL \Delta t^{\lambda} \quad (33)$$

$$\Delta t^{\lambda} = \frac{\min(X_i, X_j)}{\max_{m=1,2,3,4} |\tilde{\lambda}^m|}$$

که در رابطه فوق $X_i = \frac{A_i}{\max_{k=1,NE} \{I_k\}}$ و $X_j = \frac{A_j}{\max_{k=2,4} \{I_k\}}$ می‌باشد (Toro, 2001).

نتیجه‌گیری و بحث

شبیه‌سازی شکست سد در حالت یک‌بعدی

در این بخش سه آزمون برای یک کانال مستقیم با عرض واحد و مقطع عرضی مستطیلی و بستر کاملاً افقی مورد بررسی قرار می‌گیرد. شایان ذکر است که این سه آزمون با استفاده از حل‌کننده‌های دقیق مسئله ریمان توسط Toro (2001) حل شده است. برای هر سه آزمون طول کانال ۵۰ متر، عرض کانال واحد و طول سلول ۰/۱ متر می‌باشد. شرایط اولیه آزمون‌ها در جدول ۱ بیان شده است.

در جدول ۱، h ارتفاع آب، u سرعت در جهت کانال، x_0 موقعیت قرار گرفتن دریچه، t_{out} زمان خروجی نتایج می‌باشد. L و R نیز معرف سمت چپ و راست موقعیت دریچه می‌باشد. در مدل حاضر جهت مدل‌سازی شارهای درون سلولی از روش Roe استفاده شده است که یکی از روش‌های تقریبی حل مسئله ریمان می‌باشد.

$$\tilde{e}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ (\tilde{u}.n(\tilde{C}+n_y) + n_y \tilde{A}) / (n_x \tilde{C} - n_y \tilde{B}) \\ -(\tilde{u}.n(\tilde{B}+n_x) + n_x \tilde{A}) / (n_x \tilde{C} - n_y \tilde{B}) \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\tilde{e}^{-m} = \begin{pmatrix} 1 \\ n_y(\tilde{u} n_y - \tilde{v} n_x) + n_x \tilde{\lambda}^m \\ -n_x(\tilde{u} n_y - \tilde{v} n_x) + n_y \tilde{\lambda}^m \\ (\tilde{u}.n + \tilde{\lambda}^m (\tilde{\lambda}^m - 2\tilde{u}.n)) / \tilde{c}^{-2} - 1 \end{pmatrix}^T \quad m=2,3,4 \quad (29)$$

سپس در سلول i در زمان t^{n+1} با انتگرال‌گیری رابطه (۳۰) حاصل می‌شود:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{k=1}^{NE} \sum_{m=1}^4 \tilde{\lambda}_k^m \alpha_k^m \tilde{e}_k^m I_k + \Delta t S_S^* \quad (30)$$

که S_S^* فقط عبارت منبع اصطکاک گسسته‌سازی شده، Δt بازه زمانی، A_i مساحت سلول، α_k^m ضریب قدرت موج و I_k طول لبه سلول است.

در تحقیق حاضر، تمامی روند مدل سازی جریان و انتقال رسوب از ابتدا کد نویسی شده است و از محیط نرم افزاری متلب جهت کد نویسی معادلات حاکم استفاده شده است.

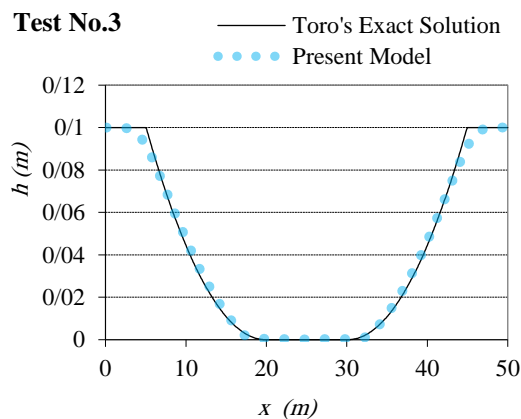
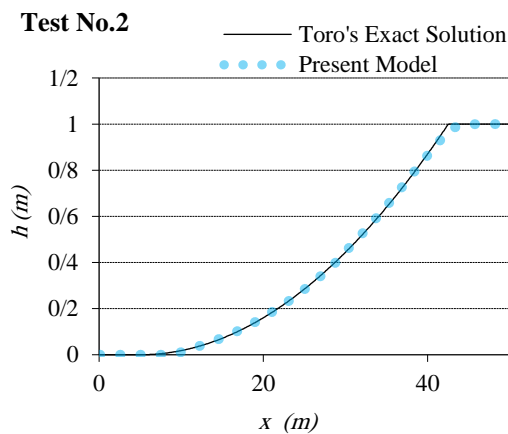
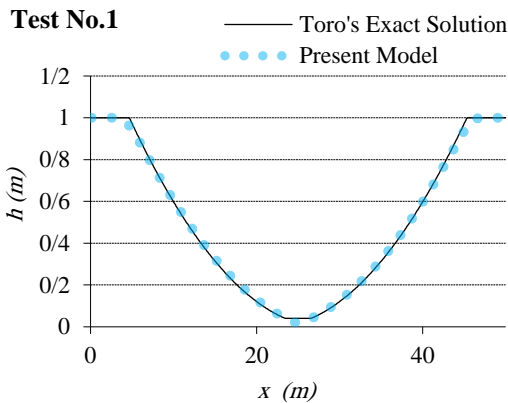
شرایط مرزی

یکی از ملزومات اصلی حل عددی معادلات آب‌های کم عمق، شناخت شرایط مرزی در بالادست، پایین دست و یا در صورت نیاز، مرزهای داخلی می‌باشد. دو گروه از شرایط مرزی را می‌توان بدون در نظر گرفتن رژیم جریان بکار برد. این شرایط شامل مرز باز یا انتقال دهنده و مرز بسته یا انعکاسی می‌باشند، که در ادامه بیان شده‌اند. شرایط مرزی در مرزهای باز شامل موارد زیر هستند:

$$\begin{aligned} h_0 &= h_1 & h_{n+1} &= h_n \\ u_0 &= u_1 & u_{n+1} &= u_n \end{aligned} \quad (31)$$

شرایط مرزی در مرزهای بسته (انعکاسی) شامل موارد زیر است:

$$\begin{aligned} h_0 &= h_1 & h_{n+1} &= h_n \\ u_0 &= -u_1 & u_{n+1} &= -u_n \end{aligned} \quad (32)$$



شکل (۱): مقایسه نتایج مدل حاضر برای پروفیل سطح آزاد جریان با نتایج ارائه شده توسط Toro

شبیه‌سازی شکست سد در حالت دوبعدی

در این قسمت مدل‌سازی شکست سد دایره‌ای شکل در حالت دوبعدی که حل دقیق آن توسط Toro (2001) ارائه

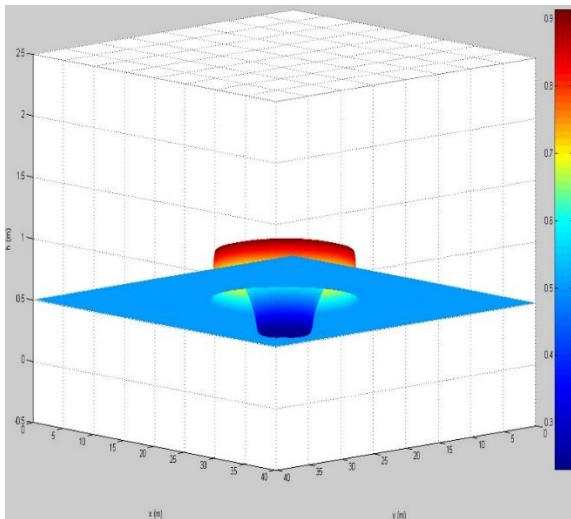
جدول (۱): شرایط اولیه آزمون‌ها

Test	۱	۲	۳
$h_L (m)$	۱/۰	۰/۰	۱/۰
$u_L (m / s)$	-۵/۰	۰/۰	-۳/۰
$h_R (m)$	۱/۰	۱/۰	۰/۱
$u_R (m / s)$	۵/۰	۱/۰	۳/۰
$x_0 (m)$	۲۵/۰	۳۰/۰	۲۵/۰
$t_{out} (s)$	۲/۵	۴/۰	۵/۰

در آزمون اول شرایط اولیه طوری انتخاب شده است که دو موج انبساطی قوی به دو سمت مخالف در حال حرکت است. آب در منطقه شروع بین این موج‌ها خیلی کم عمق می‌باشد. دلایل عددی خوبی برای انتخاب این آزمون وجود دارد. در بسیاری از روش‌ها یک عمق آب منفی در نزدیکی آب‌های بسیار کم عمق به وسیله دو موج پیوسته ایجاد می‌گردد. در چنین مواقعی ممکن است در محاسبه سرعت انتشار امواج برای روش‌های عددی مشکل بوجود آید. آزمون دوم مسئله ریمان برای سمت چپ سد که بستر خشک می‌باشد، بیان می‌گردد. در آزمون سوم ایجاد بستر خشک مطرح می‌گردد. داده‌ها اینگونه بیان می‌کنند که این آزمون برای تولید راه حلی که دارای دو موج انبساطی با یک ناحیه خشک در بین آن‌ها می‌باشد انتخاب شده است. بسیاری از روش‌های عددی به علت وجود بستر خشک، توانایی مدل‌سازی این آزمون را با دقت بالا دارا نمی‌باشند.

در ادامه نتایج این سه آزمون با استفاده از روش حل تقریبی مسئله ریمان Roe در مقایسه با حل دقیق ارائه شده Toro آورده شده است. در شکل (۱) این مقایسه برای پروفیل آب در هر سه آزمون صورت پذیرفته است. نتیجه مقایسه نمودارهای یک‌بعدی حاکی از توانایی و تطابق بسیار خوب مدل عددی Roe در مدل‌سازی امواج شوک و انبساطی و همچنین مدل‌سازی بستر خیس و خشک است و همان‌طور که مشاهده می‌شود مدل حاضر با دقت خوبی عمق را مدل کرده است.

به صفر بوده و یک موج ثانویه ناپیوسته را شکل می‌دهد. همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود موج ناپیوسته اولیه از مرکز دایره به سمت بیرون انتشار می‌یابد و موج ناپیوسته ثانویه به سمت مرکز سد انتشار یافته است. در شکل های (۵) و (۶) مقایسه نتایج مدل حاضر با نتایج ارائه شده توسط Toro در زمان های $1/4$ و $3/5$ ثانیه آورده شده است. با توجه به این شکل ها می توان مشاهده کرد که نتایج حاصل از مدل سازی عددی دارای دقت مناسبی در مقایسه با نتایج حل دقیق می‌باشد. ولیکن شایان ذکر است که در محاسبه حداکثر و حداقل عمق آب دارای افت کمی شده است که این امر ناشی از خطای پخشیدگی روش‌های با دقت مرتبه اول می‌باشد (Toro, 2001).

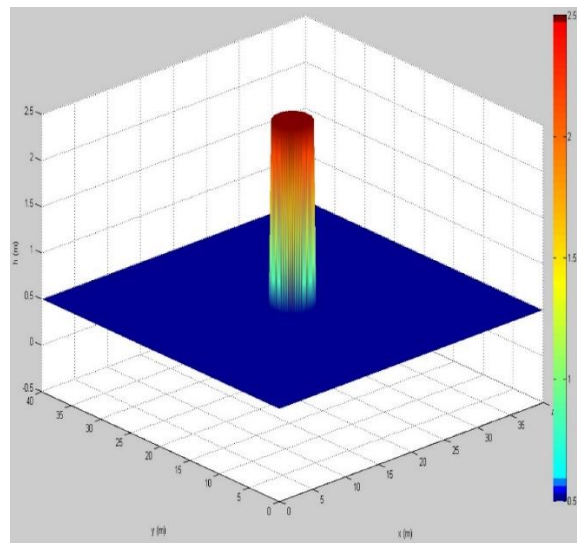


شکل (۳): پروفیل سطح آب مدل حاضر بعد از شکست سد در زمان $t=1.4 \text{ s}$

شده است، انجام می‌شود. در این آزمون سد دارای بستر افقی است و مطالعه بر روی انتشار امواج در حالتی که سد دایره‌ای ناگهانی و به طور کامل از بین برود انجام می‌گیرد. سد از یک دیواره با ضخامت خیلی ناچیز به شعاع $2/5$ متر تشکیل شده است و محدوده محاسباتی آن 40×40 متر می باشد که سد دقیقاً در وسط قرار گرفته است. شرایط اولیه سد به این صورت بوده که $u=v=0$ می باشد و عمق به صورت رابطه زیر تعیین می گردد:

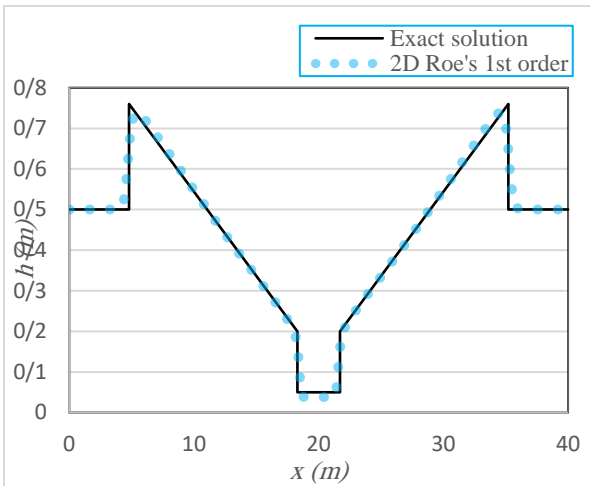
$$h(x, y, 0) = \begin{cases} h_{ins} = 2.5 \text{ m} & \text{if } (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \leq R^2 \\ h_{out} = 0.5 \text{ m} & \text{if } (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \geq R^2 \end{cases} \quad (34)$$

با توجه به اینکه دیواره سد به صورت آبی شکسته شود، خروجی نتایج برای دو زمان متفاوت آورده شده است. در ادامه شکل (۲) مدل سد را با شرایط اولیه در زمان صفر نشان می‌دهد.

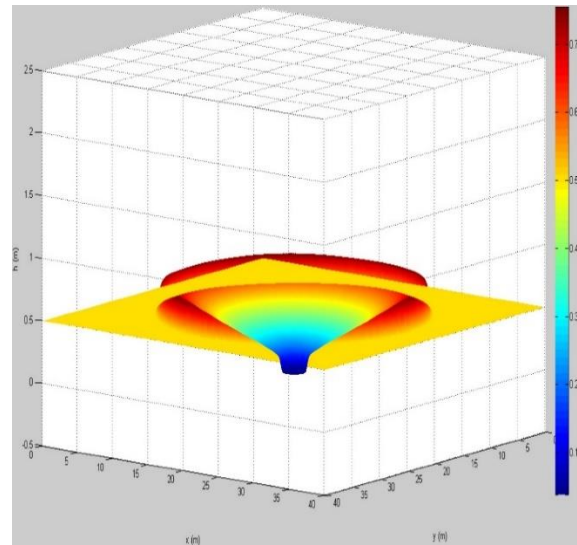


شکل (۲): سطح آب در زمان $t=0 \text{ s}$ برای شکست سد دایره‌ای

شکل (۳) و (۴) به ترتیب پروفیل سطح آب را پس از گذشت زمان $1/4$ و $3/5$ ثانیه را نمایش می‌دهد. در شکل (۳) موج ناپیوسته به سمت خارج از مرکز دایره انتشار می‌یابد. موج پیوسته به سمت مرکز دایره منعکس می‌گردد که باعث می‌شود جریان به سمتی پیش رود که پروفیل سطح آب از عمق قسمت بیرونی سد دایره‌ای در شرایط اولیه عبور کند و به سمت پایین برود. در واقع سطح آب خیلی نزدیک



شکل (۶): مقایسه نتایج مدل حاضر با نتایج ارائه شده توسط Toro در زمان $t=3.5 s$ برای سطح آزاد محاسبه شده در مسئله شکست سد دایره‌ای

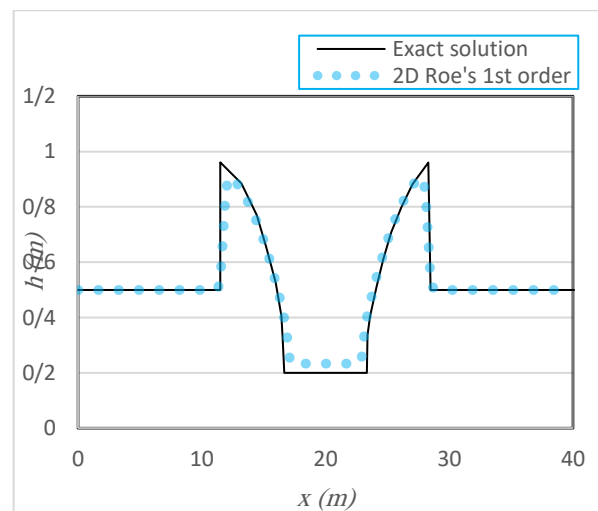


شکل (۴): پروفیل سطح آب مدل حاضر بعد از شکست سد در زمان $t=3.5 s$

شبه‌سازی بستر متحرک در حالت یک‌بعدی این آزمون که شامل مسئله ریمان برای معادلات بستر متحرک می‌باشد. شرایط اولیه $u_L = 1.5 m/s$ ، $h_L = 6 m$ و $z_L = 1 m$ برای $x < 0$ و $h_R = 5.399 m$ و $z_R = 0.955 m$ و $u_R = 3.946 m/s$ برای $x > 0$ می‌باشد. حل دقیق این مسئله توسط Serrano-Pacheco و همکاران (2012) صورت پذیرفته است. شکل (۷) و (۸) مقایسه نتایج مدل حاضر را برای ارتفاع آب و بستر متحرک در زمان ۳۰ ثانیه با حل دقیق و مدل با دقت مرتبه دوم هادسون نمایش می‌دهد. با توجه به نتایج، میانگین خطای نسبی مدل حاضر برای ارتفاع آب برابر 0.105 درصد و برای بستر متحرک برابر 0.305 درصد می‌باشد. در صورتیکه میزان خطا در روش هادسون برای ارتفاع آب و بستر متحرک در این زمان به ترتیب برابر $2/303$ و 0.933 درصد می‌باشد. این امر نشان دهنده دقت قابل قبول و مناسب مدل ارائه شده در این تحقیق می‌باشد.

شبه‌سازی بستر متحرک در حالت یک‌بعدی

این آزمون که شامل مسئله ریمان برای معادلات بستر متحرک می‌باشد. شرایط اولیه $u_L = 1.5 m/s$ ، $h_L = 6 m$ و $z_L = 1 m$ برای $x < 0$ و $h_R = 5.399 m$ و $z_R = 0.955 m$ و $u_R = 3.946 m/s$ برای $x > 0$ می‌باشد.



شکل (۵): مقایسه نتایج مدل حاضر با نتایج ارائه شده توسط Toro در زمان $t=1.4 s$ برای سطح آزاد محاسبه شده در مسئله شکست سد دایره‌ای

و مدل Hudson بر حسب درصد خطای نسبی آورده شده است.

جدول (۲): مقایسه نتایج ارتفاع سطح آزاد جریان و ارتفاع بستر متحرک جریان با حل دقیق

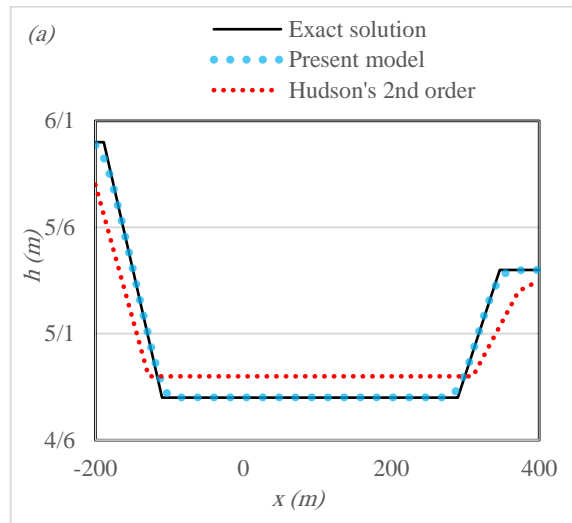
	حداکثر خطا نسبی	حداکثر خطا نسبی
	مدل حاضر (%)	مدل Hudson (%)
ارتفاع آب	0.51	4.54
جریان		
ارتفاع بستر	1.65	4.26
متحرک جریان		

شبیه‌سازی بستر متحرک در حالت دوبعدی

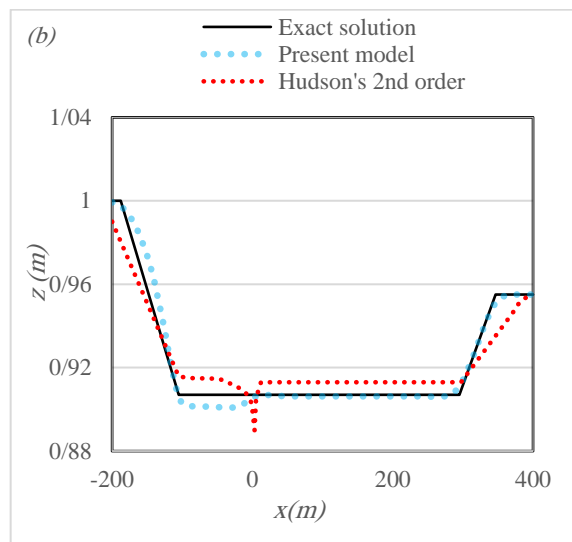
در این آزمون برای ارزیابی عملکرد مدل حاضر در حضور جریان کاملاً دوبعدی آب، یک تپه مخروطی به عنوان بستر در نظر گرفته شده است. این آزمون بر روی دامنه محاسباتی 1000×1000 متر صورت می‌پذیرد که مشبندی آن با سلول‌هایی به طول ۱۰ متر بوده و شرایط اولیه آن به صورت $u(x, y, z) = q/h(x, y, 0)$ ، $h(x, y, 0) = 10 - z(x, y, 0)$ و $v(x, y, z) = 0$ می‌باشد که شکل اولیه بستر تپه مخروطی از رابطه زیر حاصل می‌شود (Serrano-Pacheco et al., 2012):

$$z(x, y, 0) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi(x-300)}{200}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(y-400)}{200}\right) & \text{if } 300 \leq x \leq 500, 400 \leq y \leq 600 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (35)$$

شرایط مرزی جریان ورودی به صورت دبی واحد عرض $q = 10 \text{ m}^2 / \text{s}$ می‌باشد که از سمت غرب وارد می‌شود. شرایط مرزی شرق به صورت جریان آزاد عمل می‌کند و مرزهای شمال و جنوب به صورت دیوار بسته می‌باشند. تخلخل رسوب بستر 0.4 و ضریب ثابت مدل گرس به صورت $A_g = 1$ فرض می‌شود. تپه مخروطی توسط جریان آب تغییر شکل می‌دهد. شکل (۹) نتایج شبیه‌سازی مدل حاضر و شکل (۱۰) نتایج مدل Hudson (2001) را برای بستر متحرک را در $t = 500 \text{ s}$ نشان می‌دهد.



شکل (۷): مقایسه ارتفاع سطح آزاد آب مدل حاضر، مدل با دقت مرتبه دوم Hudson و حل دقیق در زمان $t=30\text{s}$



شکل (۸): مقایسه ارتفاع بستر متحرک مدل حاضر، مدل با دقت مرتبه دوم Hudson و حل دقیق در زمان $t=30\text{s}$

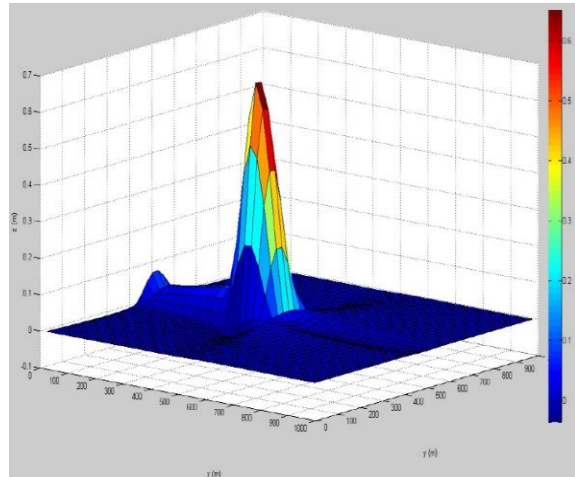
از طرف دیگر، همان‌طور که از مقایسه نتایج در شکل (۷) مشخص است مدل حاضر که یک مدل با دقت مرتبه اول است در مقایسه با مدل هادسون که دارای دقت مرتبه دوم می‌باشد، در شبیه‌سازی به تطابق قابل قبولی رسیده است.

در جدول ۲ مقایسه نتایج ارتفاع سطح آزاد جریان در مدل حاضر با نتایج حل دقیق و مدل Hudson و مقایسه نتایج ارتفاع بستر متحرک جریان در مدل حاضر با نتایج حل دقیق

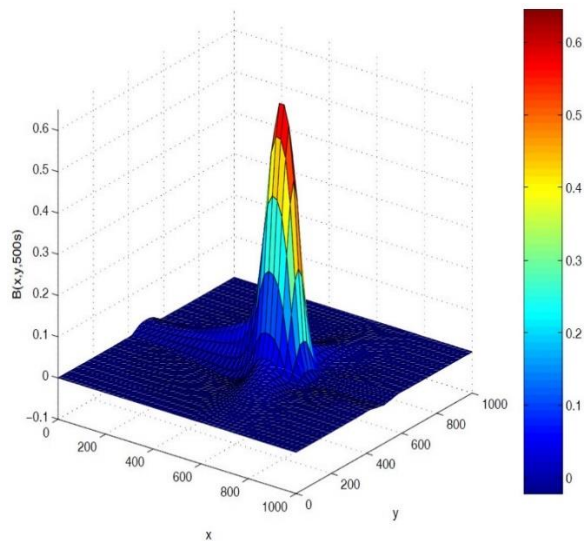
نتیجه گیری

در تحقیق حاضر مدل عددی حجم محدود بر اساس روش آپویند با استفاده از مقادیر متوسط Roe توسعه یافته است. در مدل حاضر محاسبه بار بستر متحرک با استفاده از مدل Grass و تبعیت از معادله Exner صورت پذیرفته است. تمرکز تحقیق حاضر روی روش حل همزمان معادلات جریان و انتقال بار بستر می‌باشد. بدین مفهوم که ارتفاع آب و ارتفاع بستر به طور همزمان بدست می‌آیند. فرمولاسیون روش همزمان توسط معادلات آب کم عمق دوبعدی به همراه معادله Exner ارائه شده است. برای استفاده از تکنیک آپویند ماتریس تقریبی ژاکوبین تعمیم یافته تعریف شده است و مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر برای حالت کلی معرفی شده اند. حل همزمان متغیرهای جریان سطح آزاد آب و ارتفاع بستر متحرک در یک گام زمانی دارای دقت بالاتری نسبت به حل غیر همزمان است اگرچه پیچیدگی و زمان محاسبات بیشتری نسبت به حل غیر همزمان دارد. در نهایت مدل حاضر جهت مدل‌سازی، جریانهای یک‌بعدی و دوبعدی آب کم عمق با بار بستر متحرک مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج مدل حاضر با راه حل‌های دقیق و دیگر مدل‌سازی‌ها مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که مدل عددی حاضر توانایی مدل‌سازی فرایند جریان و انتقال بار بستر را با دقت قابل قبولی دارد.

همان‌طور که از شکل‌های (۹) و (۱۰) مشخص می‌باشد، مدل حاضر شبیه‌سازی بستر متحرک را با تطابق قابل قبولی انجام داده است.



شکل (۹): نتایج عددی مدل حاضر برای آزمون بستر تپه مخروطی متحرک دوبعدی در $t=500$ s



شکل (۱۰): نتایج عددی برای آزمون بستر تپه مخروطی متحرک دوبعدی در $t=500$ s توسط Hudson

توجه به این نکته ضروری می‌باشد که مدل حاضر دارای دقت مرتبه اول می‌باشد در صورتیکه مدل Hudson (2001) دارای دقت مرتبه دوم می‌باشد. بنابراین تفاوت بین مدل حاضر و مدل Hudson به علت تفاوت دقت شبیه‌سازی در مدل حاضر می‌باشد.



منابع

- Biswal, S.K., Moharana, M.K. and Agrawal, A.K., 2018. Effects of initial stage of dam-break flows on sediment transport. *Sādhanā*, 43(12), p.203.
- Grass, A.J., 1981. Sediment transport by waves and currents. University College, London, Department of Civil Engineering.
- Fent, I., Van Emelen, S. and Soares-Frazão, S., 2018. Comparison Between Models Used to Simulate Dam-Break Flows over a Mobile Bed Made of Different Materials. In *Advances in Hydroinformatics* (pp. 1133-1147). Springer, Singapore.
- Frey, P., Maurin, R., Morchid-Alaoui, L., Gupta, S. and Chauchat, J., 2017. Investigation of vertical size segregation in bedload sediment transport with a coupled fluid-discrete element model. In *EPJ Web of Conferences* (Vol. 140, p. 09025). EDP Sciences.
- Hudson, J., 2001. Numerical techniques for morphodynamic modelling (Doctoral dissertation, University of Reading).
- Hudson, J. and Sweby, P.K., 2005. A high-resolution scheme for the equations governing 2D bed-load sediment transport. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(10-11), pp.1085-1091.
- Jelti, S., Mezouari, M. and Boulerhcha, M., 2018. Numerical modeling of dam-break flow over erodible bed by Roe scheme with an original discretization of source term. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 45(1).
- Mahdizadeh, H. and Sharifi, S., 2019. A fully-coupled bedload sediment transport model based on a two-dimensional modified wave propagation algorithm. *Journal of Hydraulic Research*, pp.1-17.
- Murillo, J., García-Navarro, P., Brufau, P. and Burguete, J., 2008. 2d modelling of erosion/deposition processes with suspended load using. *Journal of Hydraulic Research*, 46(1), pp.99-112.
- Roe, P.L., 1986. A basis for upwind differencing of the two-dimensional unsteady Euler equations. *Numerical Methods in Fluid Dynamics II*, pp.55-80.
- Serrano-Pacheco, A., Murillo, J. and Garcia-Navarro, P., 2012. Finite volumes for 2D shallow-water flow with bed-load transport on unstructured grids. *Journal of Hydraulic Research*, 50(2), pp.154-163.
- Toro, E.F. and Toro, E., 2001. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows (Vol. 868). New York: Wiley.
- Van Rijn, L.C., 1993. Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas (Vol. 1006, pp. 11-3). Amsterdam: Aqua publications.
- Van Rijn, L.C., Walstra, D.J.R. and van Ormondt, M., 2007. Unified view of sediment transport by currents and waves. IV: Application of morphodynamic model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(7), pp.776-793.
- Vázquez-Cendón, M.E., 1999. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *Journal of Computational Physics*, 148(2), pp.497-526



Wengrove, M.E., Foster, D.L., Lippmann, T.C., de Schipper, M.A. and Calantoni, J., 2019. Observations of Bedform Migration and Bedload Sediment Transport in Combined Wave-Current Flows. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 124(7), pp.4572-4590.



Numerical Modeling of Flow and Bed Load Transport Using Roe Method

Abdolreza Tavakoli¹, Mahnaz Ghaeini-Hessaroezeh^{2*}, Ehsan Fadaei-Kermani³

Abstract

In the present study, the two-dimensional finite volume model of flow and bed load transport has been developed. The governing equations consist of shallow water equations and Exner equation. The Exner equation is based on the depth-averaged shallow water equations and bed load transport flow-sediment interaction parameter that acts as a calibration factor. In addition, The Grass model is employed to calculate sediment discharge. The governing equations are solved using a fully coupled method. The Roe method is selected to compute the intercell fluxes on quadrilateral networks. The Roe approximate Riemann solver is a first-order scheme. Finally the performance of the present model is evaluated. The results of the present model are compared with the exact solutions, and other available numerical results in one-dimensional and two-dimensional tests. Results show that the present model is appropriate, and capable of modeling the mobile beds.

Key words: finite volume method, sediment transport, Exner equation, Grass model, Roe model.

¹ M.Sc. Graduate, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, PO Box 76169-133, Kerman, Iran (Email: a.reza_tavakoli@yahoo.com)

^{2*} Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, PO Box 76169-133, Kerman, Iran (Corresponding author, Email: mghaeini@uk.ac.ir)

³ Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, PO Box 76169-133, Kerman, Iran (Email: e.fadaei@uk.ac.ir)