



مقایسه روابط مختلف برآورد نیمرخ عمقی سرعت طولی بر مبنای روش بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک

مریم تیموری یگانه^۱، رسول قبادیان^{۲*}، محمد مهدی حیدری^۳

تاریخ ارسال: ۱۳۹۸/۱۲/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۰۹

مقاله علمی پژوهشی

چکیده

توزیع عمقی سرعت طولی در رودخانه‌ها و کانال‌های روباز برای مدل‌سازی بسیاری از فرآیندهای هیدرولیکی مورد نیاز است. از این‌رو ارائه مناسب‌ترین رابطه برآورد توزیع سرعت که منطبق بر داده‌های اندازه‌گیری باشد همواره مورد توجه محققین بوده و به صورت دائم در حال توسعه است. با توسعه تئوری آنتروپی و همچنین بهینه‌سازی به روش الگوریتم ژنتیک، این روش‌ها در طیف وسیعی از علوم مهندسی از جمله مکانیک سیالات و هیدرولیک به کار برده شده‌اند. در این تحقیق پارامترهای مجهول روابط مرسوم توزیع عمقی سرعت طولی با استفاده از بهینه‌سازی بر مبنای روش الگوریتم ژنتیک دو دویی بهینه‌یابی شدند. تعداد پارامترهای بهینه شده در مدل‌های یانگ، ژولیان، چپو و تسالیس به ترتیب ۴، ۵، ۳ و ۵ پارامتر می‌باشند. نتایج تحقیق نشان داد پس از بهینه‌یابی پارامترهای روابط، توزیع سرعت یک‌بعدی تخمین زده شده توسط هر چهار مدل ارائه شده در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی از دقت بالایی برخوردار است به‌گونه‌ای که تحلیل آماری نتایج نشان داد مقدار متوسط ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) برای کل شبیه‌سازی‌ها توزیع سرعت یک بعدی در مدل یانگ ۰/۰۵۴ متر بر ثانیه، برای مدل ژولیان برابر با ۰/۰۵۲ متر بر ثانیه، در مدل چپو ۰/۰۴۲ متر بر ثانیه و برای مدل تسالیس ۰/۰۳۵ متر بر ثانیه است. با این وجود نظر به اینکه تعداد پارامترهای بهینه استخراج شده توسط مدل ژولیان و تسالیس از دو مدل دیگر بیشتر است در مدل‌سازی رودخانه‌های آبرفتی توصیه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی، پدیده دیپ، توزیع سرعت، روش چپو، روش تسالیس، مدل ژولیان، مدل

یانگ

^۱ دانشجوی دکتری سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، گروه مهندسی آب، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران، m.yeganeh1390@gmail.com

^۲ دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران، ۰۸۳۳۸۳۲۳۷۲۷، rsglobalian@gmail.com (نویسنده مسئول)

^۳ استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران، ۰۸۳۳۸۳۲۳۷۲۷، mm.heidari@ut.ac.ir

مقدمه

(۲۰۰۸) سعی داشتند با اصلاح قانون لگاریتمی و یا ارائه مدل‌هایی جدید، بر پایه‌ی شرایط حاکم در ناحیه خارجی در کانال‌های کم‌عرض ($B/h < 5$) توزیع سرعت در این ناحیه را به دست آورند. کولز (۱۹۵۶) و یانگ (۲۰۰۴) با افزودن ترم‌هایی اصلاحی به قانون لگاریتمی سعی در بهبود نتایج حاصل از این قانون در ناحیه خارجی داشته‌اند. بنکداری (۱۳۹۲) و ابسی (۲۰۱۱) نیز با استفاده از معادلات ناویر استوکس مدل‌هایی را پیشنهاد نموده‌اند. که به مراتب نتایج بهتری نسبت به مدل‌های دیگر ارائه دادند. از آنجا که این دو مدل بر پایه روابط ریاضی و ساده سازی‌های آن حاصل شده‌اند قابل استفاده در کانال‌های مصنوعی هستند. بخصوص در کانال‌های فاضلاب به منظور محاسبه دبی می‌توان از این دو مدل استفاده نمود. تیموری یگانه و حیدری (۲۰۲۰) با استفاده از سه روش آنالیز شانون، رنی و تسالیس به بررسی توزیع سرعت با اندازه‌گیری سرعت در دو نقطه در کانال مستطیلی روباز پرداختند، نتایج مطالعات ایشان دقت بالای هر سه روش را در تخمین توزیع سرعت نشان داد. چپو (۱۹۸۷) با استفاده از اصل حداکثر آنالیز و مفهوم احتمال در کانال‌های روباز، معادله دوبعدی سرعت جریان را ارائه کرد. چپو و ساید (۱۹۹۵) با استفاده از پارامتر آنالیز یک رابطه بین سرعت متوسط و حداکثر جریان ارائه دادند که با استفاده از این رابطه می‌توان دبی رودخانه را تخمین زد. تیموری یگانه و حیدری (۱۳۹۶) با استفاده از تئوری آنالیز رنی، معادله‌ای برای پروفیل یک بعدی سرعت در مجاری روباز توسعه و دقت این روش را با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی مورد بررسی قرار دادند. نتایج تحقیق نشان داد که این روش دارای دقت بالایی با داده‌های مشاهده‌ای می‌باشد. امید و کرباسی (۱۳۹۲) به بررسی کاربرد آنالیز برای به دست آوردن توزیع سرعت در آبراهه‌های روباز پرداخته‌اند و مدل توزیع سرعت چپو را با داده‌های آزمایشگاهی در بسترهای صاف و زبر مورد ارزیابی و تحلیل قرار داده‌اند. نتایج نشان داد که این مدل با دقت قابل قبولی توانایی پیش بینی توزیع سرعت قائم در آبراهه‌های روباز را دارا می‌باشد. همچنین نشان داده‌اند که دقت این روش در بستر صاف بیشتر از بسترهای زبر می‌باشد.

توزیع سرعت یکی از مهم‌ترین مباحث در مطالعات جریان‌ها در کانال‌های روباز است، زیرا برای محاسبه سرعت متوسط، برآورد دبی و ارزیابی تنش برشی روی جداره‌ها، انتقال رسوب، انتقال آلودگی و مقاومت جریان مورد نیاز است. در کانال‌های روباز و رودخانه‌ها عریض، سرعت از صفر در کف کانال به مقدار بیشینه در نزدیکی سطح آب افزایش می‌یابد و می‌تواند به صورت تقریباً یک‌بعدی در نظر گرفته شود. برای کانال‌هایی که عریض نیستند، در کنار تغییرات در جهت قائم، سرعت طولی در جهت عرضی نیز تغییر می‌کند، بنابراین توزیع سرعت دوبعدی در نظر گرفته می‌شود. توزیع سرعت در کانال‌های باز در طول سالیان طولانی مورد مطالعه قرار گرفته و در سال‌های اخیر، این موضوع با حل معادلات هیدرودینامیک ناویر- استوکس که با مدل‌های متلاطم ترکیب شده است، بررسی می‌گردد. این مدل‌ها به قوانین محاسبات فیزیکی وابسته هستند که جریان مایع را به عنوان مسائل مقدار مرزی در نظر می‌گیرند و بر اساس آن محاسبات را انجام می‌دهند. توزیع سرعت در یک مقطع کانال معمولاً از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. این امر ناشی از تنش برشی در کف و دیواره‌های کناری کانال و به علت وجود سطح آزاد جریان است. فغفور مغربی و رحیم‌پور (۲۰۰۷) بیان داشتند که توزیع سرعت در مقطع کانال به عواملی مانند دانسیته و لزجت سیال، شکل مقطع، زبری دیواره‌های کانال و وجود انحنا در مسیر کانال بستگی دارد. افضلی مهر و همکاران (۲۰۱۱) بیان کردند پیروی یا عدم پیروی از توزیع لگاریتمی برای نیمرخ‌های سرعت جریان به دلیل تاثیر متقابل زبری عناصر و شکل آن‌ها بر دینامیک جریان متلاطم در عمق جریان است و بر اساس غالب و مغلوب بودن هر یک از این عوامل روند توزیع این نیمرخ‌ها متفاوت خواهد بود. پیو (۲۰۱۲) قانون توزیع سرعت لگاریتمی را برای جریان کانال‌های روباز صاف و زبر پیشنهاد داد. همچنین به منظور مقایسه پروفیل سرعت به دست آمده از معادله ناویر استوکس، با فرض جریان کاملاً آشفته و در نظر گرفتن تاثیر جریان‌اتانویه ناچیز، از قانون توزیع سرعت لگاریتمی استفاده نمود. محققینی چون کولز (۱۹۵۶) یانگ (۲۰۰۴)، ابسی (۲۰۱۱) و بنکداری



گای و همکاران (۱۹۶۱-۱۹۵۶) استفاده شد. آزمایش‌های این محققین، در دو فلوم آزمایشگاهی در دانشگاه کلورادو به عرض‌های ۰/۶۱ متر (۲ فوت) و ۲/۴۴ متر (۸ فوت) و طول ۴۵/۷۲ متر (۱۵۰ فوت) انجام شده است. حداکثر دبی جریان قابل انتقال در این فلوم‌های آزمایشگاهی ۶۲۳ لیتر بر ثانیه می‌باشد. شیب کف فلوم‌های مذکور بین ۰ تا ۱/۵ درصد قابل تغییر است. بستر فلوم‌های آزمایشگاهی از ۱۰ نوع دانه‌بندی مختلف در محدوده ماسه با قطر ۰/۱۹ تا ۰/۹۳ میلی‌متر پوشانده شده است. همچنین عمق آب در فلوم آزمایشگاهی با استفاده از عمق‌سنج و دبی جریان توسط اریفیس اندازه‌گیری شد. در جدول (۱) پارامترهای هیدرولیکی برخی از آزمایشات گای و همکاران (۱۹۶۱-۱۹۵۶) مربوط به کانال ۰/۶۱ متر با زبری بستر ۰/۳۲ میلی‌متر آورده شده است.

بررسی منابع مختلف نشان می‌دهد تا کنون روابط متعددی برای توزیع عمقی سرعت طولی در کانال‌های روباز ارائه شده است. در این روابط ضرایب مختلفی وجود دارد که بسته به نوع رابطه می‌تواند به ۵ ضریب نیز برسد. هدف اصلی تحقیق حاضر بهینه‌یابی این ضرایب برای شرایط مختلف هیدرولیکی با استفاده از روش فراکوشی الگوریتم ژنتیک دودویی می‌باشد. بویژه بهینه‌یابی پارامترهای آنژیومی تسالیس و چپو با استفاده از الگوریتم ژنتیک که خود از جنبه‌های جدید تحقیق حاضر است. در ادامه روابط مختلف توزیع سرعت با پارامترهای بهینه شده با یکدیگر مقایسه گردیدند.

مواد و روشها

به‌منظور بررسی توزیع سرعت جریان با استفاده از روش‌های موردنظر تحقیق حاضر، از داده‌های اندازه‌گیری شده توسط

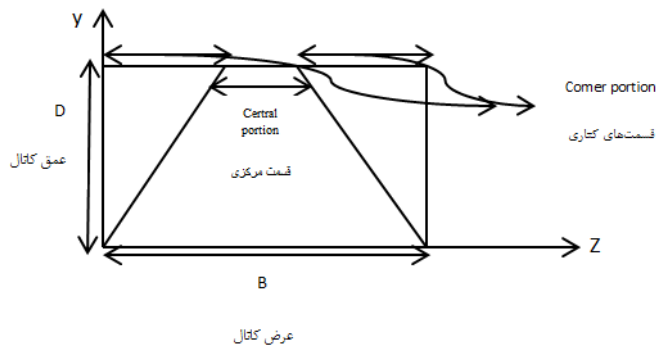
جدول (۱): پارامترهای هیدرولیکی مربوط به آزمایشات گای و همکاران (۱۹۶۱-۱۹۵۶)

شماره	سرعت متوسط $u_{ave}(m/s)$	سرعت حداکثر $u_{max}(m/s)$	سرعت برشی (U^*) S_0 (m/s)
۴	۰/۳۷۸	۰/۵۲۷	۰/۰۱۵
۷	۰/۸۹۹	۱/۲۶۲	۰/۰۱۵
۱۰	۱/۲۵۶	۱/۵۸۸	۰/۰۱۵
۱۱	۱/۳۷۵	۱/۸۳۸	۰/۰۱۵
۱۲	۱/۲۲۸	۱/۶۰۳	۰/۰۱۵
۲۰	۱/۲۸۹	۱/۸۵۳	۰/۰۱۵

مقطع عرضی کانال می‌باشد این مدل براساس دو فاصله لگاریتمی، یکی فاصله از بستر و دیگری فاصله از سطح آزاد آب و یک پارامتر تصحیح پدیده دیپ β بنا نهاده شده است شکل (۱) سیستم مختصات و تقسیم بندی کانال را براساس الگوی یانگ و همکاران برای جریان دائمی یکنواخت در کانال روباز نشان می‌دهد.

روابط برآورد توزیع سرعت

یانگ و همکاران (۲۰۰۴) یک قانون لگاریتمی اصلاح شده برای توزیع سرعت و نمایش پدیده دیپ (وقوع سرعت حداکثر زیر سطح آب، نزو و رودی، ۱۹۸۴) در کانال تنگ ارائه دادند که قادر به توصیف پروفیل سرعت از بستر تا سطح آزاد آب و از مرکز کانال تا نواحی مجاور دیواره‌ها در



شکل (۱): تقسیم بندی مقطع کانال مستطیلی بر اساس الگوی یانگ و همکاران (۱۹۵۶-۱۹۶۱)

بیفتند، اصلاح نمودند و رابطه (۵) را که قانون لگاریتمی اصلاح شده نامیده می‌شود (MLWL)، ارائه نمودند (۱۳).

$$\frac{u_x}{u_*} = \left[\left(\frac{1}{k} \ln \frac{zu_*}{v_m} + B \right) + \frac{2\Pi_w \sin^2 \frac{\pi \xi}{2}}{k} \right] - \frac{\xi^3}{3k} \quad (۵)$$

که در آن B ثابت ناشی از زبری دیواره، u_* سرعت برشی، v_m لزجت سینماتیک، Π_w قدرت گردابه‌ای کولز، Z فاصله از دیواره و $\xi = \frac{Z}{Z_m}$ مقدار فاصله نرمال نسبت به موقعیت پدیده دیپ Z_m می‌باشد.

همچنین در شرایطی که فرم بستر وجود داشته باشد، متوسط ارتفاع فرم بستر به منظور تخمین پروفیل سرعت در نظر گرفته می‌شود. رابطه (۶) پروفیل توزیع سرعت در حالتی که فرم بستر وجود داشته باشد، برآورد می‌کند.

$$\frac{u_x}{u_*} = \frac{1}{k} \left[\left(\ln \frac{Z}{Z_0} + B \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{Z-Z_0}{Z_m-Z_0} \right)^3 \right] + \frac{2\Pi_w u_* \sin^2 \frac{\pi(Z-Z_0)}{2(Z_m-Z_0)}}{k} \quad (۶)$$

به منظور توصیف توزیع سرعت یک بعدی به روش چپو از رابطه (۷) به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$u = \frac{u_{\max}}{M} \ln \left[1 + (e^M - 1) \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right] \quad (۷)$$

که در آن $\xi = (y/D+h) \exp(1-(y/D+h))$ می‌باشد. برای اساس برای توصیف توزیع سرعت یک بعدی در روش چپو ۳ حالت اتفاق می‌افتد.

- حداکثر سرعت، u_{\max} ، در فاصله $h (<0)$ زیر سطح آب یا در همان $y=D+h$ بالای کف کانال رخ دهد. در این

یانگ و همکاران (۲۰۰۴) در نهایت رابطه (۱) را برای تخمین توزیع سرعت ارائه نمودند.

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{k} \left[\ln(y/y_0) + \beta \ln \left[\frac{1-y/D}{1-y_0/D} \right] \right] \quad (۱)$$

که y_0 فاصله‌ای است که در آن سرعت برابر با صفر فرض می‌شود. از آنجا که $y_0/D \ll 1$ معادله (۱) به معادله زیر برای توزیع سرعت در کانال روباز تبدیل می‌شود:

$$U_a = \frac{1}{k} \left[\ln \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right) + \beta \ln(1-\xi) \right] \quad (۲)$$

که $\xi_0 = \frac{y_0}{D}$ و $\xi = \frac{y}{D}$ ، $U_a = \frac{u}{u_*}$ این معادله قادر به

توصیف پدیده دیپ در کانال‌های کم‌عرض روباز بوده و فقط شامل یک پارامتر β می‌باشد، و به ازای $\beta=0$ معادله فوق به قانون لگاریتمی معروف تبدیل می‌شود. یانگ و همکاران (۲۰۰۴) رابطه زیر را برای برآورد پارامتر تصحیح پدیده دیپ (β) ارائه نمودند:

$$\beta = c_1 \exp(-c_2 A_p Z) \quad (۳)$$

که $Z = 2z/B$ فاصله جانبی بدون بعد از دیواره کناری است. یانگ و همکاران (۲۰۰۴) از طریق کالیبراسیون، دو ضریب c_1 و c_2 را $c_1 = 1.3$ و $c_2 = 0.5$ به دست آوردند در نتیجه معادله (۲-۳۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\beta = 1.3 \exp(-z/D) \quad (۴)$$

گو و ژولیان (۲۰۰۳) قانون لگاریتمی سرعت را برای شرایطی که مقدار حداکثر سرعت زیر سطح آب اتفاق

استفاده از روش بهینه سازی بر اساس آنچه در ادامه آورده شده است تعیین گردید.

بهینه سازی

برای حل مساله بهینه سازی در الگوریتم ژنتیک از انتخاب کاملاً تصادفی جواب ها از بین فضای شدنی استفاده می شود که اصطلاحاً یک نسل نامیده می شود. سپس از بین این جمعیت انتخاب شده جواب های بهتر انتخاب شده و با استفاده از فرایندهای تقاطع، جهش، ترکیب، جایگزینی و نخبه گرایی جواب های بهتر با هم تلفیق شده و نسل بهتر از جواب ها تشکیل می شود و تا رسیدن به بهترین جواب های ممکن این روند ادامه پیدا می کند (جانگ و کارنی ۲۰۱۴). در این تحقیق کد نوشته شده برای بهینه سازی در محیط برنامه نویسی ویژوال بیسیک تهیه شده است. الگوریتم ژنتیک به کار رفته در این مطالعه براساس یک سیستم دودویی شامل (۱ و ۰) می باشد به نحوی که پارامترهای مدل به مبنای ۰ و ۱ انتقال یافته و به عبارت دیگر رمزار می شوند. چنانچه محدوده تغییرات هر پارامتر $a_i \leq x_i \leq b_i$ باشد و میزان دقت اعداد برابر Δn_i باشد از رابطه زیر می توان تعداد ژن ها n_i را محاسبه نمود (البرزی انتشارات دانشگاه شریف است):

$$2^{n_i-1} \leq (b_i - a_i) \times 10^{\Delta n_i} \leq 2^{n_i} \quad (14)$$

در این تحقیق تعداد پارامترهای با توجه به نوع رابطه برآورد توزیع سرعت بین سه تا ۵ متغیر می باشد که باید تعیین شوند. با در نظر گرفتن میزان دقت اعداد Δn_i برابر یکم تعداد ژن ها (n_i) برای هر رابطه محاسبه گردید. پس از تعیین طول رشته یا ژن های مربوط به هر پارامتر، لازم است طول کروموزوم جامعه تعیین شود. با توجه به تعداد پارامترها (m) که همان متغیرهای تصمیم می باشد، طول کروموزوم جامعه به صورت زیر تعیین می شود:

$$L = \sum_{i=1}^m n_i \quad (15)$$

در اجرای الگوریتم ژنتیک دودویی جمعیت اولیه کروموزوم ها به طور تصادفی تولید می شود. چنانچه بخواهیم تعداد N کروموزوم که هر کروموزوم L بیت طول داشته باشد را به

حالت، ξ_{max} برابر یک شده و با در نظر گرفتن ξ_0 برابر صفر معادله (۷) به رابطه (۸) تبدیل می شود (چیو، ۱۹۸۷):

$$u = \frac{u_{max}}{M} \text{Ln} \left[1 + (e^M - 1) \frac{y}{D+h} \exp \left(1 - \frac{y}{D+h} \right) \right] \quad (8)$$

- حداکثر سرعت بر روی سطح آب رخ داده و h برابر صفر است. بنابراین ξ_{max} برابر یک شده و معادله (۷) به صورت رابطه (۹) برای توزیع سرعت یک بعدی ساده می شود:

$$u = \frac{u_{max}}{M} \text{Ln} \left[1 + (e^M - 1) \frac{y}{D} \exp \left(1 - \frac{y}{D} \right) \right] \quad (9)$$

- حداکثر سرعت بالا سطح آب رخ دهد و h بزرگ تر از صفر باشد. در این حالت h دیگر معنای فیزیکی اشاره شده را ندارد و تنها یک ضریب است که برای تنظیم دقیق انحنای توزیع سرعت به کار می رود. در این حالت مقدار ξ_{max} از رابطه (۱۰) بدست می آید:

$$\xi_{max} = \frac{D}{D+h} \exp \left(1 - \frac{D}{D+h} \right) \quad (10)$$

بنابراین معادله (۷) به صورت رابطه (۱۱) نوشته می شود:

$$u = \frac{u_{max}}{M} \text{Ln} \left[1 + (e^M - 1) \frac{y}{D} \exp \left(\frac{D-y}{D+h} \right) \right] \quad (11)$$

هنگامی که h به سمت بی نهایت میل می کند. معادله (۱۱) به صورت معادله (۱۲) تبدیل خواهد شد:

$$u = \frac{u_{max}}{M} \text{Ln} \left[1 + (e^M - 1) \frac{y}{D} \right] \quad (12)$$

به منظور توصیف توزیع سرعت یک بعدی به روش تسالیس (۱۹۸۸) از رابطه (۱۳) به صورت زیر استفاده می شود.

$$\frac{u}{u_{max}} = \frac{B}{\lambda_2} \left[\lambda_2 \frac{y}{D-h} \exp \left(1 - \frac{y}{D-h} \right) + \left(\frac{\lambda_*}{B} \right)^B \right]^{1/B} - \frac{\lambda_*}{\lambda_2} \quad (13)$$

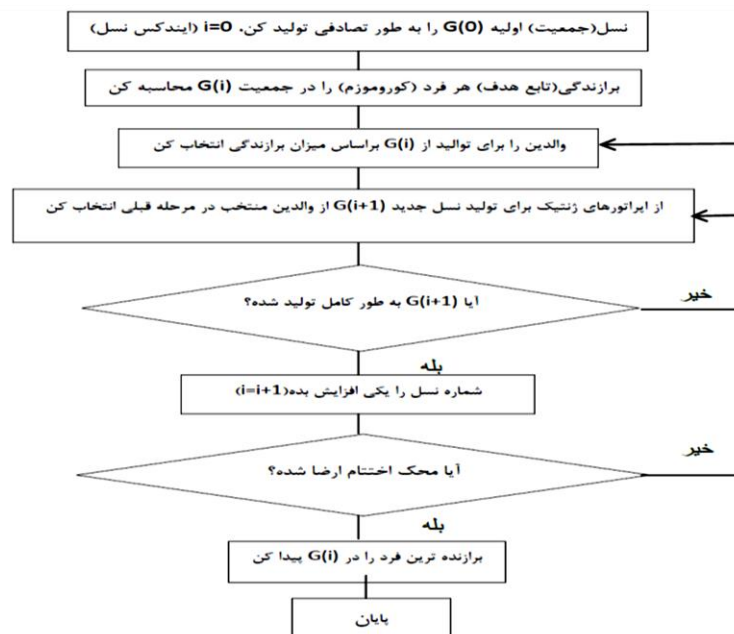
$$B = \frac{m}{m-1}$$

که در آن m, λ_2, λ_* پارامترهای آنتروپی تسالیس، D عمق جریان می باشد.

در این تحقیق به منظور تعیین پروفیل سرعت براساس مدل یانگ (رابطه ۱) چهار پارامتر β, y_0, k, u_* بر اساس مدل ژولیان (رابطه ۶) پنج پارامتر z_m, Π_w, k, z_0, u_* ، در روش چیو (رابطه ۱۱) سه پارامتر h, M, u_{max} و در روش تسالیس (رابطه ۱۳) پنج پارامتر $h, \lambda_2, \lambda_*, m, u_{max}$ با

$Rnd[]$ استفاده می شود. در شکل (۲) روند نمای بهینه سازی به روش الگوریتم ژنتیک نشان داده شده است.

وجود آوریم باید $N \times L$ عدد تصادفی از مجموعه‌ی (۰ و ۱) تولید شود که برای انتخاب هر کدام از این اعداد از تابع



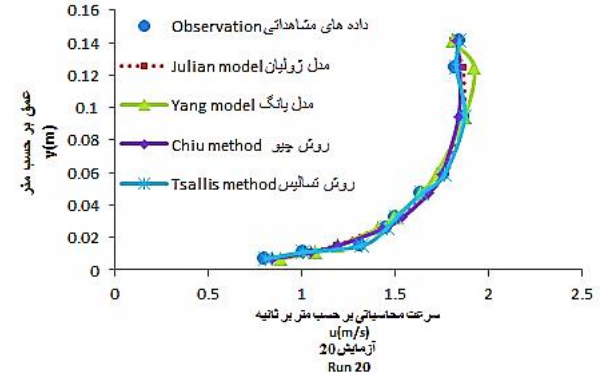
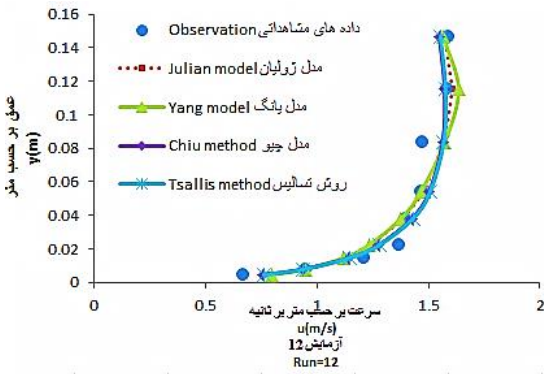
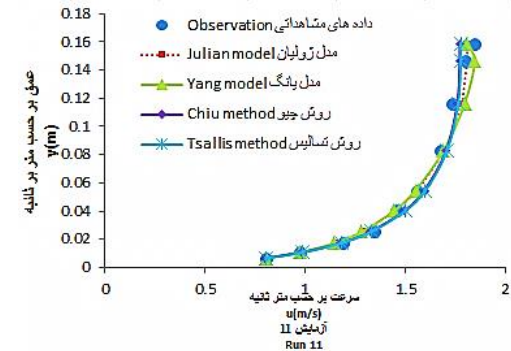
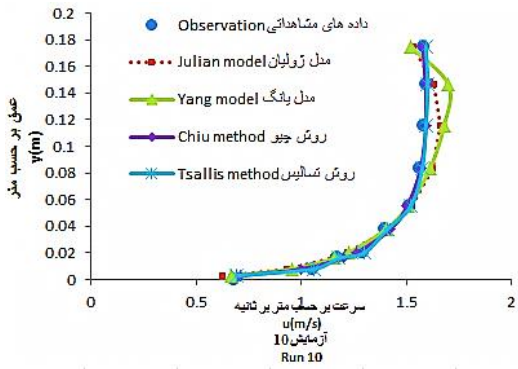
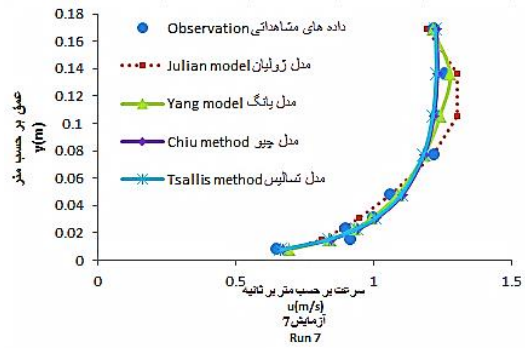
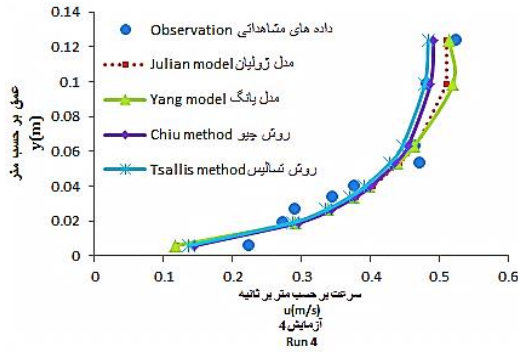
شکل (۲): روند نمای بهینه سازی به روش الگوریتم ژنتیک

آزمایش ها کافی به نظر میرسد و مقدار خطا به مقدار ثابتی رسیده است.

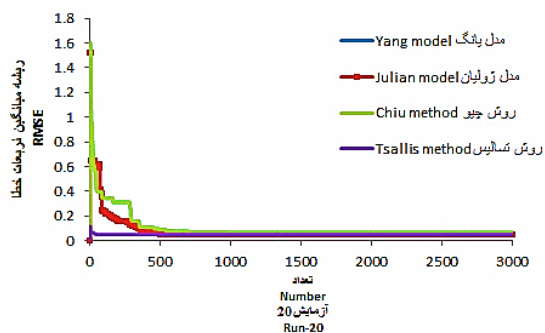
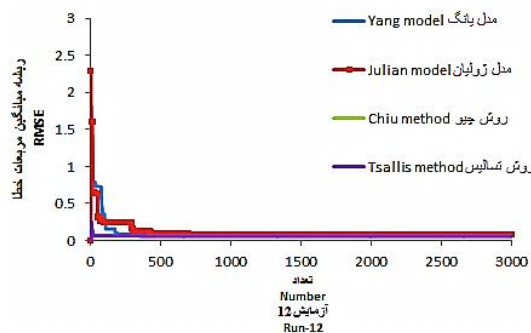
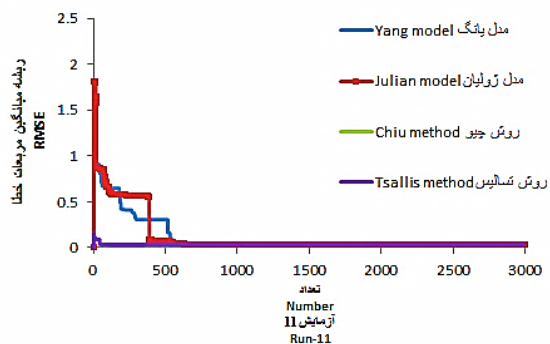
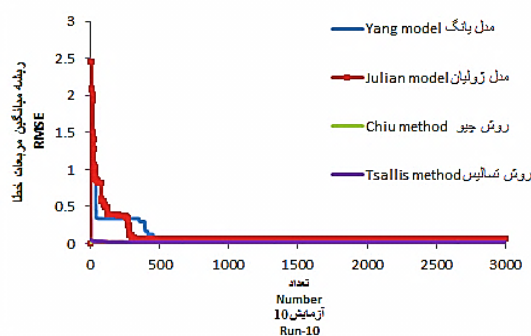
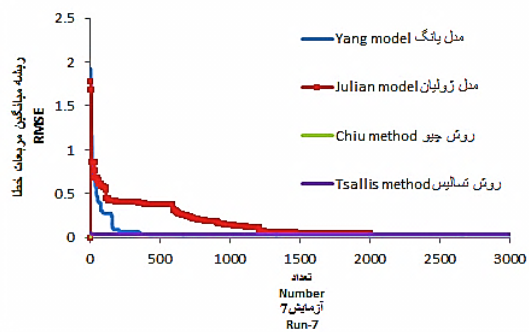
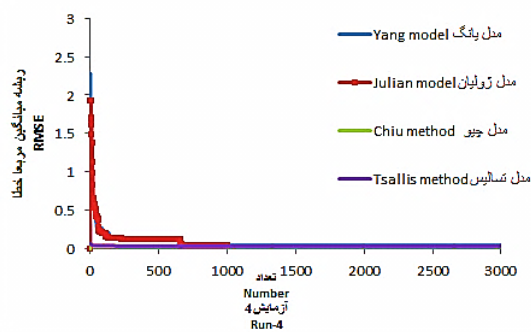
نکته قابل توجه این است که مقادیر سرعت برشی محاسبه شده در مدل های ژولیان و یانگ تقریباً با هم خوانی دارند ولی با مقدار آرایه شده در جدول (۱) بجز در آزمایش های شماره ۲۰ و ۱۱ متفاوت می باشد. دلیل آن می تواند در روش محاسبه تنش برشی در جدول (۱) و مدل های حاضر می باشد. مقادیر آرایه شده برای سرعت برشی در جدول (۱) بر اساس شیب و شعاع هیدرولیکی کانال محاسبه شده است در حالیکه در مدل های مورد نظر این تحقیق بر اساس نیمرخ سرعت و استفاده از تمامی نقاط موجود در نیمرخ سرعت محاسبه شده است.

نتایج و بحث

در این تحقیق ابتدا مقادیر بهینه پارامترهای موجود در مدل های یانگ و ژولیان و روابط مبتنی بر آنتروپی چپو و تسالیس با استفاده از الگوریتم ژنتیک تعیین گردید. سپس توزیع سرعت یک بعدی بهینه یابی شده در مقابل توزیع سرعت اندازه گیری شده مربوط به آزمایش های گای وهمکاران (۱۹۵۶-۱۹۶۱) ترسیم شده است (شکل ۳). علاوه بر این مقادیر پارامترهای محاسبه شده برای مدل های مذکور و برای هر آزمایش در شکل (۳) آرایه شده است. به منظور اطمینان از کفایت تعداد تکرار و یافتن پارامترهای بهینه مقادیر تابع هدف (ریشه میانگین مربعات خطا) در مقابل تکرار ترسیم که در شکل (۴) نمایش داده شده است. همانگونه که ملاحظه می شود تعداد تکرار ۳۰۰۰ برای همه



شکل (۳): توزیع سرعت یک بعدی اندازه گیری شده و برآورد شده به روش های مختلف



شکل (۴): RMSE برای تکرارهای مختلف در مدل پانگ، ژولیان، روش چیو و تسالیس

در جدول ۲ مقادیر بهینه پارامترهای هر یک از روش‌ها برای ۶ سری از آزمایش‌های گای و همکاران (۱۹۶۱-۱۹۵۶) نشان داده شده است.

جدول (۲): مقادیر بهینه پارامترهای ۴ مدل مورد بررسی در تحقیق حاضر

شماره آزمایش	روش یانگ	روش ژولیان	روش چپو	روش تسالیس
آزمایش ۴	$u_* = 0.063$ $k = 0.42$ $z_0 = 0.003$ $\beta = 0.078$	$u_* = 0.063$ $k = 0.42$ $z_0 = 0.003$ $z_m = 0.113$ $\Pi_w = 0.01$	$u_{max} = 0.491$ $M = 2.039$ $h = 0$	$u_{max} = 0.483$ $\lambda_2 = 4.47$ $\lambda_* = 0.55$ $h = 0$ $m = 1.479$
آزمایش ۷	$u_* = 0.09$ $k = 0.41$ $z_0 = 0$ $\beta = 0.142$	$u_* = 0.06$ $k = 0.379$ $z_0 = 0$ $z_m = 0.121$ $\Pi_w = 0.75$	$u_{max} = 1.231$ $M = 4.156$ $h = 0.024$	$u_{max} = 1.223$ $\lambda_2 = 4.21$ $\lambda_* = 0.659$ $h = 0.0249$ $m = 1.481$
آزمایش ۱۰	$u_* = 0.125$ $k = 0.42$ $z_0 = 0$ $\beta = 0.229$	$u_* = 0.125$ $k = 0.398$ $z_0 = 0$ $z_m = 0.15$ $\Pi_w = 0$	$u_{max} = 1.595$ $M = 4.809$ $h = 0.046$	$u_{max} = 1.588$ $\lambda_2 = 7.14$ $\lambda_* = -1.39$ $h = 0.044$ $m = 1.497$
آزمایش ۱۱	$u_* = 0.141$ $k = 0.391$ $z_0 = 0.001$ $\beta = 0.078$	$u_* = 0.15$ $k = 0.414$ $z_0 = 0.001$ $z_m = 0.149$ $\Pi_w = 0$	$u_{max} = 1.77$ $M = 3.511$ $h = 0.011$	$u_{max} = 1.835$ $\lambda_2 = 5.28$ $\lambda_* = -0.06$ $h = 0.01$ $m = 1.495$
آزمایش ۱۲	$u_* = 0.107$ $k = 0.387$ $z_0 = 0$ $\beta = 0.141$	$u_* = 0.109$ $k = 0.389$ $z_0 = 0$ $z_m = 0.115$ $\Pi_w = 0$	$u_{max} = 1.573$ $M = 3.951$ $h = 0.041$	$u_{max} = 1.573$ $\lambda_2 = 5.84$ $\lambda_* = -0.54$ $h = 0.04$ $m = 1.501$
آزمایش ۲۰	$u_* = 0.152$ $k = 0.382$ $z_0 = 0.001$ $\beta = 0.149$	$u_* = 0.18$ $k = 0.42$ $z_0 = 0.001$ $z_m = 0.105$ $\Pi_w = 0$	$u_{max} = 1.848$ $M = 2.951$ $h = 0.048$	$u_{max} = 1.852$ $\lambda_2 = 3.87$ $\lambda_* = 0.825$ $h = 0.046$ $m = 1.5$

$$\text{Error} = \frac{|u_{o(i)} - u_{e(i)}|}{u_{o(i)}} \times 100 \quad (17)$$

در این روابط، $u_{o(i)}$ مقدار سرعت اندازه‌گیری شده در نقطه i ام، $u_{s(i)}$ مقدار سرعت محاسبه شده، n تعداد داده‌ها مشاهداتی است.

در جدول ۳ میزان درصد میانگین ریشه مربعات خطا (RMSE) برای آخرین تکرار در روش چپو، روش

هر چهار مدل مورد بررسی بدرستی موقعیت حداکثر سرعت و مقدار آنرا برآورد کرده‌اند. در حالت کلی نیمرخ محاسبه شده توسط مدل‌های مذکور از دقت مناسب برخوردار هستند. به منظور مقایسه دقیقتر و ارزیابی دقت مدل‌های مذکور از پارامترهای آماری زیر استفاده شد:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_{s(i)} - u_{o(i)})^2} \quad (16)$$



را به خود اختصاص می دهند. مقادیر میانگین این آماره به ترتیب ۰/۰۳۵، ۰/۰۴۲، ۰/۰۵۲، ۰/۰۵۴ متر بر ثانیه برای مدل های مذکور می باشد.

تسالیس، مدل ژولیان و مدل یانگ به تفکیک برای هر آزمایش ارائه شده است. همانگونه که ملاحظه میشود در حالت کلی روش مبتنی بر آنتروپی تسالیس، آنتروپی چپو، مدل ژولیان و مدل یانگ به ترتیب کمترین مقدار RMSE

جدول (۳): متغیر آماری RMSE بر حسب متر بر ثانیه برای تخمین توزیع سرعت یک بعدی در کانال مستطیلی

شماره آزمایش	روش تسالیس	روش چپو	مدل ژولیان	مدل یانگ
۴	۰/۰۴	۰/۰۳۹	۰/۰۴۴	۰/۰۴۴
۷	۰/۰۳۹	۰/۰۳۸	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲
۱۰	۰/۰۱۳	۰/۰۲۵	۰/۰۶۱	۰/۰۶۱
۱۱	۰/۰۲۷	۰/۰۲۵	۰/۰۲۹	۰/۰۲۹
۱۲	۰/۰۶۲	۰/۰۶	۰/۰۷۵	۰/۰۷۵
۲۰	۰/۰۱۱	۰/۰۵	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱

۴/۹۸ درصد، مدل یانگ برابر ۵/۶۸ درصد، در روش چپو به ۴/۳۸ درصد و روش تسالیس ۳/۶ درصد می باشد. که بیانگر دقت مناسبتر روش تسالیس در تخمین سرعت در کانال های مستطیلی می باشد.

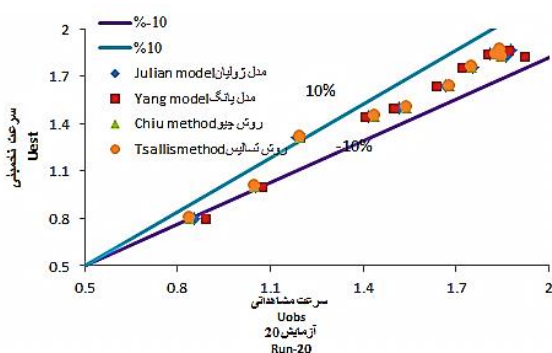
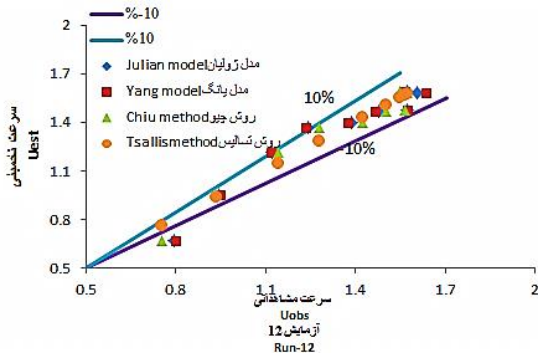
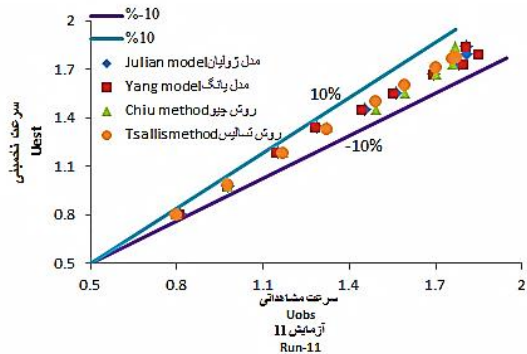
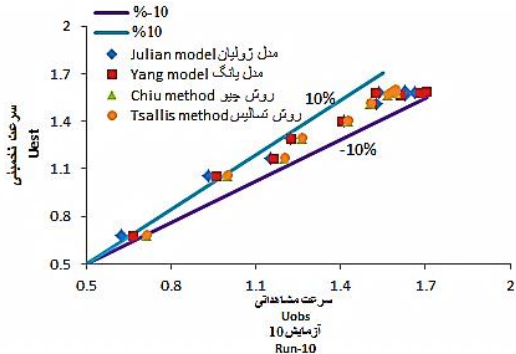
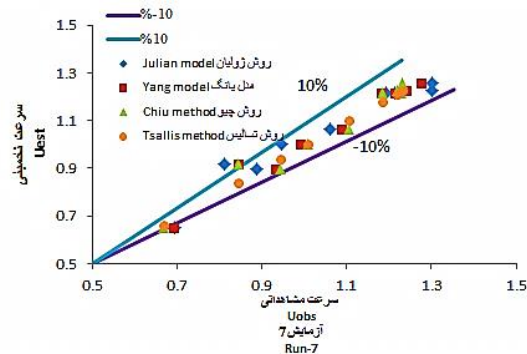
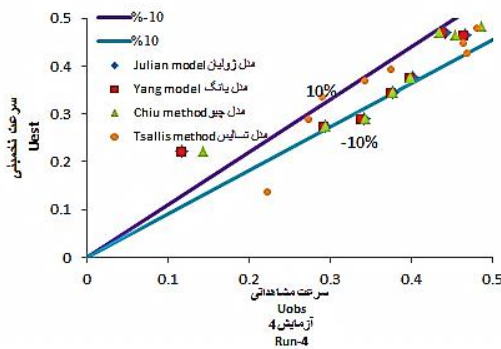
همچنین در جدول ۴ میزان درصد متوسط خطای نسبی (Error) در روش تسالیس، روش چپو، مدل ژولیان و مدل یانگ آورده شده است. مقدار متوسط خطا برای کل شبیه سازی های توزیع سرعت یک بعدی در روش ژولیان

جدول (۴): متغیر آماری Error برای تخمین توزیع سرعت یک بعدی در کانال مستطیلی

شماره آزمایش	روش تسالیس	روش چپو	مدل ژولیان	مدل یانگ
۴	۱۰/۲	۱۲/۱۶	۱۱/۴۴	۱۵/۷۶
۷	۳/۲۳	۳/۳	۴/۱	۲/۹۸
۱۰	۱/۰۳	۱/۷۹	۴/۴۲	۳/۷۳
۱۱	۱/۵۶	۱/۵۵	۱/۵۸	۱/۹۸
۱۲	۴/۷۸	۴/۵۳	۵/۲۳	۵/۶۱
۲۰	۰/۸۱	۳/۰۴	۳/۰۸	۴/۰۲

بیشتر نقاط بجز برخی نقاط نزدیک بستر کانال در هر سه مدل در داخل باند اعتماد قرار می گیرد. این موضوع نشان میدهد در صورت تخمین درست و بهینه پارامترها و ضرایب موجود در روابط توزیع سرعت هر سه مدل مذکور از قابلیت مناسبی برای تخمین توزیع قائم سرعت طولی برخوردار هستند.

در شکل (۵) برای داده های آزمایشگاهی گای و همکاران (۱۹۵۶-۱۹۶۱)، مقادیر سرعت محاسبه شده با استفاده از مدل یانگ، مدل ژولیان، روش چپو و روش تسالیس در مقابل سرعت اندازه گیری شده آورده شده است. به منظور ارزیابی بهتر باند اعتماد ۹۰ درصد یا همان خطای ۱۰ درصد ترسیم شده است. همانگونه که ملاحظه می شود



شکل (۵): مقادیر متوسط خطا در مدل یانگ، ژولیان، روش چپو و تسالیس

داده‌های اندازه‌گیری سرعت توسط گای و همکاران (۱۹۵۶-۱۹۶۱) بهینه یابی شدند. نتایج این تحقیق نشان داد:

- پس از بهینه یابی پارامترهای مجهول هریک از چهار مدل مذکور، نیمرخ‌های سرعت محاسباتی توسط آنها با دقت مناسبی بر نیمرخ‌های اندازه‌گیری شده منطبق شدند.
- سرعت های برشی محاسبه‌شده در مدل‌های یانگ و ژولیان با مقادیر ارائه‌شده توسط گای و همکاران (۱۹۶۱-۱۹۵۶) مقداری متفاوت است که دلیل آن می‌تواند روش متفاوت محاسبه سرعت برشی بر اساس شیب و شعاع هیدرولیکی توسط گای و همکاران (۱۹۵۶-۱۹۶۱) با روش بهینه یابی شده در مدل‌های مورد بحث این تحقیق باشد.

نتیجه‌گیری

قانون لگاریتمی سرعت را برای شرایطی که مقدار حداکثر سرعت زیر سطح آب اتفاق بیفتد یا به اصلاح پدیده "دپ" رخ دهد از طرف محققین مختلفی تا کنون اصلاح و بکار گرفته شده است. در تحقیق حاضر دو مدل مشهور از این نوع یعنی مدل های یانگ و همکاران (۲۰۰۴) و گو و ژولیان (۲۰۰۳) به همراه دو مدل مبتنی بر تئوری آنتروپی چپو (۱۹۸۷) و تسالیس (۱۹۸۸) مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفتند. همانگونه که در جدول ۲ اشاره شده است تعداد پارامترهای مجهول در این مدل‌ها بین ۳ تا ۵ پارامتر متغیر است. از اینرو این پارامترهای مجهول هر چهار مدل مذکور با استفاده از روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک و با توجه به



- مقایسه های آماری نسبتا مفصل نشان داد مدل تسالیس از دقت تقریبا بالاتری در مقایسه با سه مدل دیگر برخوردار است. با این وجود نمی توان از مدل ژولیان که همزمان تعداد ۵ پارامتر و مدل یانگ که ۴ پارامتر با مفهوم هیدرولیکی را آرایه می نماید چشم پوشی نمود.

- با بهینه سازی امکان محاسبه مستقیم پارامتر انتروپی چپو (M) و پارامتر های انتروپی تسالیس λ_1, λ_2 و m بر خلاف روش های قبلی وجود دارد. این امر باعث افزایش دقت مدل های مذکور بویژه در محاسبه مقدار و موقعیت حداکثر سرعت در نیمرخ عمقی سرعت طولی می شود.

منابع

امید، م.ح.، کرباسی، م. ۱۳۸۷. کاربرد مفهوم آنتروپی در به دست آوردن توزیع سرعت در آبراهه های روباز. چهارمین کنگره مهندسی عمران. دانشگاه تهران.

البرزی، م. ۱۳۹۳. الگوریتم ژنتیک، ناشر: انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

تیموری یگانه، م.، حیدری، م.م. ۱۳۹۶. توزیع سرعت یک بعدی در مجاری روباز با استفاده از تئوری آنتروپی رنی. هفتمین کنفرانس بین المللی توسعه پایدار و عمران شهری. آذر ماه ۱۳۹۶. ۴. فغفور مغربی، م. و رحیم پور، م. ۱۳۸۶. روشی برای ترسیم خطوط هم سرعت و تخمین دبی در کانال های روباز. مجله دانشکده فنی، جلد ۳۴، شماره ۳، صفحه های ۳۳ تا ۴۳.

Absi, R. 2011. An ordinary differential equation for velocity distribution and dip-phenomenon in open channel flows, J. Hydraul. Res., 49: 1, 82-89.

Afzalimehr H, Gallichand J, Sui J and Bagheri E, 2011. Field investigation on friction factor in mountainous cobble bed and boulder bed rivers. International Journal of Sediment Research 26(2): 210-221.

Aytek A and Kisi O. 2008. A genetic programming approach to suspended sediment modeling. Journal of Hydrology 351: 288-298.

Bonakdari, H. and Larrarte, F. and Lassabatere, L. and Joannis, C. 2008. Turbulent velocity profile in fully developed open channel flows, Environ Fluid Mech., pp. 1-17.

Chiu, C. L. 1987. Entropy and 2-D velocity distribution in open channels. Journal of Hydraul Engineering. 114.7: 738-756.

Chiu, C. L., Said, C. A. A. 1995. Maximum and mean velocities and entropy in open-channel flow. Journal of Hydraul Engineering. 121.1: 26-35.

Coles, D. 1956. The law of the wake in turbulent boundary layer, J. Fluid Mech. 1, 191-226.

Guo, J. and Julien P.Y. 2003. Modified log-wake law for turbulent flow in smooth pipes. J. Hyd. Res, IAHR, 41, no. 5, 493-501.

Guy H.P. 1956-61. Summary of alluvial-channel data from Rio Grande experiments.

Nezu I. and Rodi, W. 1985 Experimental study on secondary currents in open channel flow, Proc. 21st congress of IAHR, Melbourne, 115-119.

Pu, JH. 2012. Universal velocity distribution for smooth and rough open channel flows. Journal of Applied Fluid Mechanics 6(3): 413-423.

Singh, V. P. and Luo, H. 2008. Entropy theory for distribution of one-dimensional velocity in open channels, J. of Hydrologic Eng., in press.

Teymouri Yeganeh M., Heidari MM. 2020. Estimation of one-dimensional velocity distribution by measuring velocity at two points. Flow Measurement and Instrumentation. 73 (2020) 101737.

Tsallis, C. 1988. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics", J. Stat. Phys., 52(1-2), 479-487.

Yang, S. Q., Tan, S. K. and Lim, S. Y., 2004. Velocity distribution and dip-phenomenon in smooth uniform open channel flows, J. Hydraul. Eng., 130(12), 1179-1186.



Comparison of Different Relationships for Estimating Longitudinal Velocity Depth Profile Based on The Optimization Method Using Genetic Algorithm

Maryam Teymouri Yeganeh¹, Rasool Ghobadian², Mohammed Mehdi Heidari³

Abstract

Depth distribution of longitudinal velocity in rivers and open canals is required for modeling many hydraulic processes. Therefore, introducing the most appropriate relation to estimating the velocity distribution has always been of interest to researchers and is constantly evolving. With the development of entropy theory and genetic programming based on the principle of natural evolution, these methods have been applied in a wide range of engineering sciences including fluid mechanics and hydraulics. The purpose of this study was to calculate the unknown parameters of velocity distribution relationships and estimate the longitudinal velocity profile using binary genetic algorithm optimization. For this purpose, the unknown parameters of Yang, Julian, Chiu, and Tsallis models, which are 4, 5, 3, and 5 respectively, were optimized using a genetic algorithm. After determining the unknown parameters of each model, a statistical comparison was performed between the measured and estimated velocity values with the optimized relationships. The results showed that the one-dimensional velocity distribution estimated by all four models is accurate related to the experimental data. Root Mean Square Error (RMSE) for all one-dimensional velocity distribution simulations in the Yang model is 0.054, for the Julian model is 0.052, for the Chiu model is 0.042, and for the Tsallis model is 0.035m/s. However, considering the number of optimal parameters extracted by the Julian and the Thessalian models, it is recommended the use of these models to alluvial rivers.

Keywords: Chiu method, Deep phenomena, Julian model, Optimization, Tsallis model, Velocity distribution, Yang model

¹ Ph.D. Student, Water Science Engineering Department, Agriculture Faculty, Razi University, Kermanshah, Iran, (m.yeganeh1390@gmail.com)

² Associate Professor, Water Science Engineering Department, Agriculture Faculty, Razi University, Kermanshah, Iran, (*-Corresponding Author Email: rsgbobadian@gmail.com)

³ Assistant Professor, Water Science Engineering Department, Agriculture Faculty, Razi University, Kermanshah, Iran, (mm.heidari@ut.ac.ir)



Comparison of Different Relationships for Estimating Longitudinal Velocity Depth Profile Based on The Optimization Method Using Genetic Algorithm

Maryam Teymouri Yeganeh¹, Rasool Ghobadian^{*2}, Mohammad Mehdi Heidari³

Introduction

Velocity distribution is one of the most important issues in the study of flows in open channels, because of calculating discharge and average velocity, evaluating the shear stress on the walls, estimating sediment and contamination transfer and also calculating flow resistance. Therefore, introducing the most appropriate relation to estimating the velocity distribution has always been of interest to researchers and is constantly evolving. The main purpose of the present study is to optimize the unknown parameters of some appropriate relations such as: Yang, Julian, Chiu, and Tsallis models, which have 4, 5, 3, and 5 unknown parameters respectively, for different hydraulic conditions. In particular, the optimization of the entropy parameters of Tsallis and Chiu using genetic algorithms, which is itself a new aspect of the present study.

Methodology

In order to study the flow velocity distribution using the appropriate models of the present study, the data measured by Guy et al. (1956-1961) were used. The experiments were performed in two laboratory flumes at the University of Colorado at widths of 0.61 meters (2 feet) and 2.44 meters (8 feet) and lengths of 45.72 meters (150 feet). The maximum flow rate in these laboratory flumes was 623 liters per second. The bed slope of the mentioned flumes changes between 0 and 1.5%. The bed of laboratory flumes is covered with 10 different types of granulation in the sand range with a diameter of 0.19 to 0.93 mm. Also, water depth and flow discharge was measured by using depth gauge and Orifice, respectively. In present study 6 set of the experimental data measured by Guy et al. were selected. With comparison the measured velocity and calculated ones, and using genetic algorithms, unknown parameters of Yang, Julian, Chiu, and Tsallis models were optimized. Then the different optimized velocity distribution relationships were compared to each other and also with the measured values.

Discussion and Conclusion

In this research, first, the optimal values of the parameters in Yang and Julian models and the relationships based on Chiu and Tsallis entropy were determined using genetic algorithm. Then, the optimized one-dimensional velocity distribution was plotted against the measured velocity distribution of Guy et al. (1956-1956). In addition, the values of the calculated parameters for the mentioned models for each experiment set were presented (Table 1). Also, the result showed:

-After optimizing the unknown parameters of each model, the computational velocity profiles were matched to the measured profiles with appropriate accuracy.

-The shear velocities calculated in Yang and Julian models are slightly different from the values proposed by Guy et al. (1961-1956) because of the different method of calculating shear velocities based on the slope and hydraulic radius by Guy et al. (1961-1956) and with the optimization method in the models discussed in this research.

¹Ph.D. Student, Water Science Engineering Department, Agriculture Faculty Razi University, Kermanshah, Iran, (m.yeganeh1390@gmail.com)

² Associate Professor, Water Science Engineering Department, Agriculture Faculty, Razi University, Kermanshah, Iran, (*-Corresponding Author Email: rsgbobadian@gmail.com)

³ Assistant Professor, Water Science Engineering Department, Agriculture Faculty, Razi University, Kermanshah, Iran, (mm.heidari@ut.ac.ir)

-By optimizing, it is possible to directly calculate the entropy parameter of Chiu (M) and the entropy parameters of Tsallis (λ_2, λ_*, m), unlike previous methods. This increases the accuracy of these models, especially in calculating the value and position of the maximum velocity in the depth distribution of longitudinal velocity.

-Statistical comparisons showed that values of Root Mean Square Errors (RMSE) of one-dimensional velocity distribution simulations were 0.054, 0.052, 0.042, and 0.035m/s for Yang, Julian, Chiu and Tsallis models, respectively. However, considering more optimized parameters obtained in Julian and Thessalian models, it is recommended the use of these models in alluvial rivers.

Table 1- Optimal values of parameters of 4 studied models in the present study

Test Number	Yang model	Julian model	Chiu method	Tsallis method
Test 4	$u_* = 0.063$	$u_* = 0.063$	$u_{\max} = 0.491$	$u_{\max} = 0.483$
	$k = 0.42$	$k = 0.42$	$M = 2.039$	$\lambda_2 = 4.47$
	$z_0 = 0.003$	$z_0 = 0.003$	$h = 0$	$\lambda_* = 0.55$
	$\beta = 0.078$	$z_m = 0.113$ $\Pi_w = 0.01$		$h = 0$ $m = 1.479$
Test 7	$u_* = 0.09$	$u_* = 0.06$	$u_{\max} = 1.231$	$u_{\max} = 1.223$
	$k = 0.41$	$k = 0.379$	$M = 4.156$	$\lambda_2 = 4.21$
	$z_0 = 0$	$z_0 = 0$	$h = 0.024$	$\lambda_* = 0.659$
	$\beta = 0.142$	$z_m = 0.121$ $\Pi_w = 0.75$		$h = 0.0249$ $m = 1.481$
Test 10	$u_* = 0.125$	$u_* = 0.125$	$u_{\max} = 1.595$	$u_{\max} = 1.588$
	$k = 0.42$	$k = 0.398$	$M = 4.809$	$\lambda_2 = 7.14$
	$z_0 = 0$	$z_0 = 0$	$h = 0.046$	$\lambda_* = -1.39$
	$\beta = 0.229$	$z_m = 0.15$ $\Pi_w = 0$		$h = 0.044$ $m = 1.497$
Test 11	$u_* = 0.141$	$u_* = 0.15$	$u_{\max} = 1.77$	$u_{\max} = 1.835$
	$k = 0.391$	$k = 0.414$	$M = 3.511$	$\lambda_2 = 5.28$
	$z_0 = 0.001$	$z_0 = 0.001$	$h = 0.011$	$\lambda_* = -0.06$
	$\beta = 0.078$	$z_m = 0.149$ $\Pi_w = 0$		$h = 0.01$ $m = 1.495$
Test 12	$u_* = 0.107$	$u_* = 0.109$	$u_{\max} = 1.573$	$u_{\max} = 1.573$
	$k = 0.387$	$k = 0.389$	$M = 3.951$	$\lambda_2 = 5.84$
	$z_0 = 0$	$z_0 = 0$	$h = 0.041$	$\lambda_* = -0.54$
	$\beta = 0.141$	$z_m = 0.115$ $\Pi_w = 0$		$h = 0.04$ $m = 1.501$
Test 20	$u_* = 0.152$	$u_* = 0.18$	$u_{\max} = 1.848$	$u_{\max} = 1.852$
	$k = 0.382$	$k = 0.42$	$M = 2.951$	$\lambda_2 = 3.87$
	$z_0 = 0.001$	$z_0 = 0.001$	$h = 0.048$	$\lambda_* = 0.825$
	$\beta = 0.149$	$z_m = 0.105$ $\Pi_w = 0$		$h = 0.046$ $m = 1.5$



The most important references

1. Guy H.P. 1956–61. Summary of alluvial-channel data from Rio Grande experiments.
2. Guo, J. and Julien P.Y. 2003. Modified log-wake law for turbulent flow in smooth pipes. J. Hyd. Res, IAHR, 41, no. 5, 493–501.
3. Teymouri Yeganeh M., Heidari MM. 2020. Estimation of one-dimensional velocity distribution by measuring velocity at two points. Flow Measurement and Instrumentation. 73 (2020) 101737.
4. Yang, S. Q., Tan, S. K. and Lim, S. Y., 2004. Velocity distribution and dip-phenomenon in smooth uniform open channel flows, J. Hydraul. Eng., 130(12), 1179-1186.
5. Absi, R. 2011. An ordinary differential equation for velocity distribution and dip-phenomenon in open channel flows, J. Hydraul. Res., 49: 1, 82-89.
6. Pu, JH. 2012. Universal velocity distribution for smooth and rough open channel flows. Journal of Applied Fluid Mechanics 6(3): 413-423.